Energy, Mines and Resources Canada
Énergie, Mines et Ressources Canada

CANMET

Canada Centre for Mineral and Energy Technology
Centre canadien de la technologie des minéraux et de l'énergie

THÉORIE GÉNÉRALE SUR LE MÉLANGE DES MINERAIS

Noël R. Billette
Laboratoire canadien de technologie minière

DÉCEMBRE 1986

68 pp

TECHNOLOGIE DES MINÉRAUX ET DE L'ÉNERGIE
LABORATOIRES DE RECHERCHE MINIÈRE
RAPPORT DIVISIONNEL M&ET/MRL 86-154(TR)

THÉORIE GÉNÉRALE SUR LE MÉLANGE DES MINERAIS

par

N.R. Billette*

RÉSUMÉ

Les mines n'ont pas toujours prêté toute l'attention nécessaire au problème du mélange des minerais avant leur traitement. Cette situation découle du fait que les outils mathématiques n'existaient pas et qu'il devenait alors inutile d'accumuler de l'information superflue. De plus, le nombre de chantiers ou fronts en exploitation parallèle était généralement suffisamment élevé pour permettre de négliger ce problème. Avec l'introduction de méthodes d'abattage plus intensives et la réduction conséquente du nombre de sources de minerai en tout temps, il devient de plus en plus critique de réaliser un examen détaillé de ce problème et des coûts requis pour éviter une dégradation excessive de la récupération des minéraux à l'usine minéralurgique due à des fluctuations de teneur trop brusques.

Le travail présente d'abord le problème de la transformation de la corrélation bi- ou tri-dimensionnelle existant dans le gisement ou dans une partie du gisement en un courant linéaire avec ses caractéristiques propres de variance et d'autocorrélation. Le second chapitre introduit une théorie cohérente qui explique la séparation du courant dans les mines à ciel ouvert entre minerai d'une part et stérile de l'autre, et reconstitue la corrélation dans le courant de minerai. Le troisième chapitre définit la théorie du mélange de divers courants de minerai se présentant à un même point de transfert, ainsi que la façon de reconstituer la variance et la corrélation dans le lot résultant de la jonction de ces courants. Le quatrième chapitre permet d'introduire l'influence bienfaisante

* Chercheur scientifique, Évaluation et méthodes minières, Laboratoire canadien de Technologie minière, Laboratoires de recherche minière, CANMET, Énergie, mines et ressources Canada, Ottawa.

Mots clés: mélange, co-variogramme, autocorrélation, modèle binômial, probabilité, exploitation minière, grosseur de lot, accumulateur.

ou malfaisante d'accumulateurs intermédiaires, silos ou trémies, sur la corrélation et la variance de lots de grosseur donnée.

À l'aide de ces quatre chapitres, il est possible de prédire avec suffisamment de justesse le niveau des fluctuations et la corrélation à l'entrée du concentrateur. Un tel modèle permet de mesurer l'impact de diverses politiques de planification et cédulation sur le rendement de l'usine, en fonction du lissage opéré dans le système de transfert.

A GENERAL THEORY ON ORE BLENDING

by

N.R. Billette*

ABSTRACT

Mines have not always given sufficient consideration to blending ores before processing. In the report, this lack of consideration could possibly be attributed to the lack of mathematical tools to handle the voluminous data requiring processing. As well, the number of underground stopes in simultaneous production were generally sufficient to reduce fluctuations in the ore stream to acceptable levels. With the introduction of bulk mining and the consequent reduction in working faces involved, it is critical to analyze in detail the costs associated with peak fluctuations in mill feed.

The first chapter presents a model which can be used to determine stream correlation and variance at the exit of the zone or face of an orebody. The second chapter introduces a coherent theory to explain correlations in ore flow from open pit mines after separation from waste. Chapter three outlines a general blending model which looks at converging ore flows into a common stream and reconstruction of variance and correlation for the resulting lots of various sizes. Chapter four is concerned with the impact of buffer bins, bunkers and blending piles on variance and correlation of the various lot sizes in the outgoing ore.

Combined, the four chapters describe a methodology which makes it possible to predict, with sufficient accuracy, the level of fluctuations and correlation in the ore reaching the mill. Such a model can be used by mine planners to evaluate the impact of varying planning and scheduling policies on a mill yield basis.

---

* Research Scientist, Mining Methods and Evaluation group, Canadian Mine Technology Laboratory, Mining Research Laboratories, CANMET, Energy, Mines & Resources Canada, Ottawa.

Keywords: Blending, Co-variogram, Autocorrelation, Binomial model, Probability, Mining production, lot size, Bin.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
RÉSUMÉ	i
ABSTRACT	iii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1: VARIATIONS DANS LE GISEMENT	2
Modèles de calcul	2
Notion de support	4
CHAPITRE 2: TRANSFORMATION DE LA CORRÉLATION DU GISEMENT	6
Ensemble du matériel	6
Teneurs de coupure	8
Corrélation dans le minerai à ciel ouvert	10
Effet de la cédulation	17
Effet de la disponibilité de l'équipement	17
CHAPITRE 3: REGROUPEMENT DES FRONTS	20
3.1 Fronts sans corrélation entre eux	20
Cas 1: aucune corrélation au front même	20
Cas 2: corrélation existant dans le courant provenant des zones	23
Exemple	25
3.2 Cas des lots de dimension supérieure à celle du bloc	26
Calculs de corrélation et variance dans les lots de dimension supérieure au bloc unitaire et constitués de plusieurs zones	28
3.3 Corrélation présente entre les fronts	29
3.4 Variance des teneurs avec superposition des variations quantitatives de production	31
CHAPITRE 4: ACCUMULATEUR INTERMÉDIAIRE DANS LE PROCESSUS DE TRANSFERT	33
Exemple	35
DISCUSSION	38
CONCLUSION	41
BIBLIOGRAPHIE	42

Page

APPENDICE A
PARAMÈTRES STATISTIQUES DES LOTS
DE DIMENSION UNITAIRE D'UN COURANT
DE MINERAI COMPOSÉ À PARTIR DE 'm' SOURCES 43
APPENDICE B:
PARAMÈTRES STATISTIQUES DES LOTS
DE GROSSEUR 'n' D'UN COURANT DE MINERAI 47
A) COURANT SIMPLE DE MINERAI 48
B) COURANT DE MINERAI PROVENANT
DE SOURCES DIVERSES 51
APPENDICE C:
VARIATIONS DE TENEURS DANS UN SYSTÈME
DE PRODUCTION AVEC VARIATIONS QUANTITATIVES
SURIMPOSÉES 54
APPENDICE D:
TRANSFORMATION DES PARAMÈTRES STATISTIQUES
D'UN COURANT DE MINERAI LORS DU PASSAGE
DANS UN ACCUMULATEUR 57

LISTE DES TABLEAUX

		Page
1	Probabilité d'une observation de longueur ℓ dans le minerai de trois zones	13
2	Contribution relative de la longueur ℓ d'observation à la variabilité/corrélation du minerai à la sortie des zones	15
3	Variogrammes et covariogrammes standardisés du minerai à la sortie de chaque zone	16
4	Variogrammes et covariogrammes dans le minerai à la sortie de chaque zone	16

LISTE DES FIGURES

		Page
1	Corrélation dans les zones exploitées d'un gisement	3
2	Représentation schématique d'une avance possible dans une zone donnée	7
3	Distribution des teneurs dans les zones exploitées d'un gisement	7
4	Corrélation dans le matériel exploité par zone	9
5	Distribution des teneurs dans le minerai et les stériles des zones exploitées à l'étape décisionnelle	11
6	Covariogrammes à la sortie des zones sans tenir compte de la disponibilité de l'équipement	18
7	Covariogrammes à la sortie des zones de production après ajustement pour disponibilité de l'équipement	19
8	Covariogrammes à l'entrée d'un concentrateur	26
9	Fonction mélange d'un accumulateur	33
10	Combinaison des proportions K_i et des corrélations d'entrée pour calculer l'autocorrélation à la sortie d'un accumulateur	34
11	Matrice des paramètres de pondération des coefficients d'autocorrélation d'entrée pour calculer la corrélation à la sortie	37
12	Autocorrélation d'entrée et de sortie pour les paramètres de la figure 11	37
13	Variance-grosseur de lot dans un gisement	40

INTRODUCTION

Un concentrateur est habituellement rodé de façon à recevoir une alimentation à teneur fixe en métal ou minéral. Par ailleurs, le minerai qui s'y présente a tendance à fluctuer autour de cette teneur cible, tantôt plus riche, tantôt plus pauvre. Ces variations entraînent des pertes de deux types: tout d'abord, la teneur du concentré oscille de façon similaire à celle de l'alimentation, quoique avec une amplitude plus petite; ceci peut même entraîner des pénalités à l'usine de smeltage lorsque le concentré est trop riche ou trop pauvre. D'autre part, la récupération peut être réduite de plusieurs points par un engorgement du circuit à cause d'une teneur trop forte de l'alimentation.

Un opérateur de mine doit donc prévoir avec autant de précision que possible les fluctuations de teneur de l'alimentation à l'usine minéralurgique. Or ces fluctuations dépendent en partie des variations de teneur dans le dépôt, mais aussi de la manière dont le gisement est exploité et des décisions quotidiennes quant à la séquence d'exploitation. Un autre élément qui influence la qualité de l'alimentation, c'est le cheminement suivi par le minerai entre son point d'origine et son arrivée à l'usine.

Les installations de mélange visent à réduire la variance des lots de grosseur donnée dans un système de production. Il est bon de caractériser le niveau de variation initiale et de déterminer les bienfaits d'installations de mélange d'une dimension donnée. Ceci permet alors de réaliser une étude coûts-bénéfices et de préciser si l'investissement est rentable, et sous quelles conditions.

La présentation qui suit tente de définir une approche systématique au problème du mélange des minerais à partir des caractéristiques intrinsèques et des décisions prises tout au long du cheminement qui le conduit à l'usine pour son enrichissement ultérieur. Certaines parties du texte ne concernent que les exploitations en fosse, puisque la situation en souterrain diffère des activités de surface. Avec la concentration récente des activités minières dans un nombre limité de chantiers souterrains, il devient cependant de plus en plus impérieux d'intégrer la dimension mélange des minerais lors de la planification des opérations.

CHAPITRE 1: VARIATIONS DANS LE GISEMENT

L'information initiale sur laquelle sont basées les décisions de mise en valeur dérive habituellement des trous de forage au diamant. Ces derniers sont distribués d'adord de façon à délimiter la dimension de la zone intéressante, puis de plus en plus systématiquement pour délimiter les zones économiques et les zones plus pauvres.

Il existe donc des variations parfois très importantes entre divers renseignements concernant un élément – minéral ou métal – obtenus de source identique, mais à des endroits géographiques différents. Lorsque les individus tentent de séparer les zones, ils doivent habituellement définir une grosseur de lots sur laquelle se base leur estimation de qualité. Ils doivent ensuite décider à quelle concentration en métal leur technologie permet une exploitation profitable de ces blocs, malgré les différences de teneur et de variabilité interne. Cette ségrégation entre blocs économiques et sub-économiques modifie les variations de teneur entre lots successifs expédiés à l'usine d'enrichissement.

De la même manière, il existe une corrélation, une parenté entre informations voisines, que ce soit au niveau des échantillons provenant du forage ou au niveau des blocs estimés. Par les décisions prises sur la séquence d'exploitation et par les dérogations à cette politique générale occasionnée par des problèmes d'exploitation vécus au jour le jour, ces corrélations sont modifiées avant d'arriver à l'usine de traitement. Il importe, tant pour les décisions d'échantillonnage que de contrôle à l'usine, que ces corrélations et niveau de variance soient connus, afin de préciser la stratégie appropriée qui permette la récupération maximale des minéraux de valeur contenus dans le minerai d'alimentation, et ce au coût minimal.

Lorsqu'il existe des corrélations dans le gisement, il est donc nécessaire de les caractériser adéquatement. Si les variations de teneur ne fluctuent pas de façon très différente selon chacun des trois axes du gîte, ce dernier est considéré isotrope pour la variable à l'étude (figure 1, zone C). Dans la plupart des cas cependant, les gisements sont anisotropes, c'est-à-dire qu'il existe des différences significatives de corrélation selon la direction choisie (figure 1, zones A et B). Cette anisotropie cause des problèmes lors de l'exploitation, car non seulement elle entraîne des variations qualitatives (moyenne et variance) entre les niveaux opérationnels, mais en plus des corrélations différentes d'un niveau à l'autre peuvent en résulter.

Modèles de calcul

Il existe deux façons d'aborder le calcul des liens de parenté, appelés corrélation spatiale ou temporelle, entre les échantillons d'un gisement ou de courants de minerai en cours de transfert: d'une part, le semi-variogramme γ et d'autre part, le co-variogramme

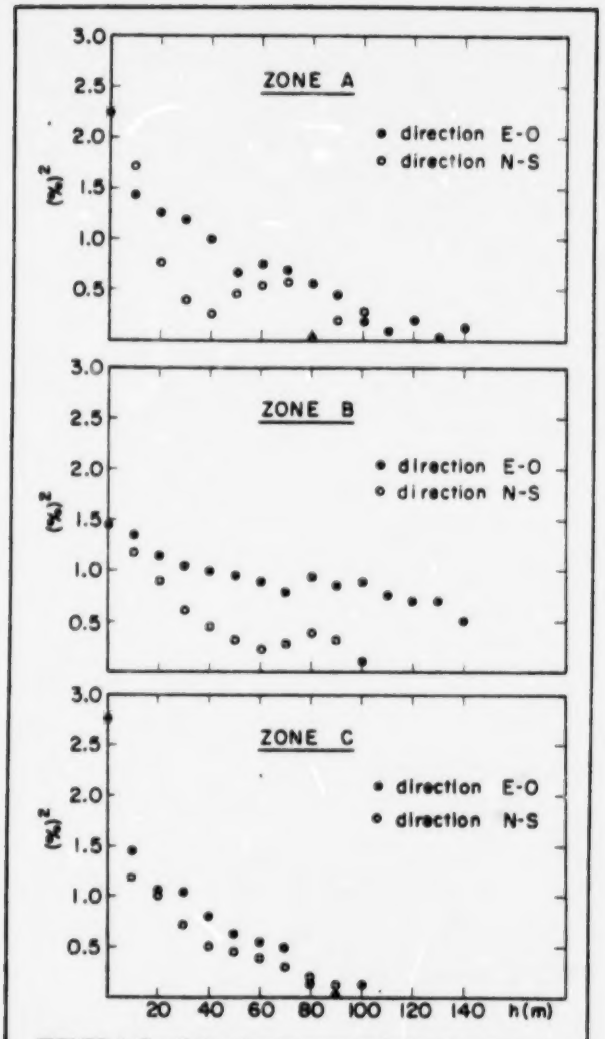

FIGURE 1. Corrélation dans les zones exploitées d'un gisement.

(ou corrélogramme) C. Ils sont liés entre eux par leur complémentarité à la variance. L'un calcule le niveau des différences ou variations entre échantillons à une distance donnée, tandis que l'autre cède le degré de corrélation entre ces mêmes échantillons.

Le semi-variogramme se calcule à partir de la formule suivante:

$$\gamma(h) = [1/(2(N-h))] \sum_{i=1}^{N-h} (x_i - x_{i+h})^2$$

où $\gamma(h)$ est la valeur du semi-variogramme à une distance 'h' entre échantillons, x_i est la valeur de la variable considérée au point 'i' et N constitue le nombre total d'observations dans la population à l'étude. Le co-variogramme s'obtient pour sa part à l'aide de l'expression suivante:

$$C(h) = [1/(N-h)] \sum_{i=1}^{N-h} (x_i - \overline{x})(x_{i+h} - \overline{x})$$

où C(h) est la valeur du co-variogramme à la distance 'h' entre échantillons, $\overline{x}$ est la teneur moyenne dans la zone, x_i et N comme ci-dessus. La relation entre les deux fonctions s'exprime comme suit:

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

où C(0) représente la variance des échantillons (h=0). Le travail présenté ci-après utilise uniquement la notion de co-variogramme.

Notion de support

Il est maintenant nécessaire d'attirer l'attention du lecteur sur la notion de support. Les analyses réalisées à partir d'échantillons représentent habituellement ces derniers de façon adéquate, puisque des décennies de rétro-analyses ont permis de réduire au minimum les erreurs de réduction et de prise d'essai. Par contre, les échantillons ne sont ni ponctuels, ni extrapolables à l'ensemble du bloc dont ils proviennent. Quand il s'agit de prélèvements de copeaux de forage d'exploitation, il faut d'abord corriger le biais introduit par la méthode de prélèvement, qui n'est pas toujours juste (au sens des théories d'échantillonnage); après correction, ces données peuvent être utilisées pour l'estimation de l'ensemble des copeaux.

C'est à partir de tels échantillons, dont le support est l'ensemble des copeaux de forage de production, que les décisions de production sont habituellement prises dans les exploitations à ciel ouvert; en souterrain, elles sont souvent prises à partir d'echantillons ponctuels, appelés *'grab samples'*, qui donnent des résultats similaires. Les exemples

ci-dessous sont élaborés à partir de tels échantillons. La variance et la corrélation sont donc valables pour cette grosseur de lot. Pour estimer des lots de grosseur différente, il faut faire les ajustements appropriés. L'utilisation de la relation de Krige permet de définir la variance des blocs de diverses grosseurs à exploiter dans chaque zone:

$$S^2(O/V) = S^2(O/v) + S^2(v/V)$$

où 'O' représente l'échantillon (copeaux), 'v' le bloc de dimensions limitées, 'V' la zone entière et S^2 la variance de ces diverses grosseurs de blocs. De plus, il a été fréquemment démontré dans le passé qu'il n'existe pas d'erreur importante à extrapoler la teneur des échantillons aux petits blocs qu'ils supportent, ce qui justifie la pratique répandue dans les opérations minières et qui consiste à réaliser cette extension.

CHAPITRE 2: TRANSFORMATION DE LA CORRÉLATION DU GISEMENT

Lorsqu'une zone de minerai est mise en exploitation parallèle avec d'autres centres de production dans le gisement, ses propriétés intrinsèques (ou internes) se retrouvent dans le courant de matériel excavé; cependant, elles ont été modifiées, puisque ses caractéristiques propres, initialement bi- ou tri-dimensionnelles, sont maintenant linéarisées dans le courant quittant la zone.

Ensemble du matériel

Ces transformations entraînent des modifications des caractéristiques de corrélation qui sont fonction des décisions prises sur la façon d'extraire le matériel de la zone: Une zone allongée sera habituellement minée longitudinalement (figure 2), tandis qu'une zone à géométrie circulaire ne présente pas de direction privilégiée d'exploitation à priori.

Un second type de décisions concerne le déplacement de l'équipement utilisé dans la zone: il est possible de définir la distance moyenne des déplacements de la machinerie utilisée pour extraire le matériel, ainsi que la fréquence relative de ces relocalisations sur une période de temps donnée, compte tenu des quantités et qualités de minerai requises à l'usine minéralurgique.

Les trois zones de la figure 1 contiennent du minerai de teneur moyenne et de variabilité différentes, tel qu'illustré sur la figure 3. De plus, la géométrie de ces zones implique un plan d'exploitation du type suivant: 70% du temps dans la direction E-O et 30% du temps dans la direction N-S pour la zone A; 80% du temps dans la direction E-O et 20% du temps dans la direction N-S pour la zone B; 60% du temps dans la direction E-O et 40% du temps dans la direction perpendiculaire N-S pour la zone C isotrope.

Comme les décisions d'exploitation sont réévaluées deux fois par jour, en début et en fin de journée du personnel d'ingénierie, ceci équivaut à déplacer l'équipement deux fois par jour en moyenne pour réajuster la production aux objectifs de qualité planifiée. Dans l'exemple choisi, la production quotidienne moyenne de l'équipement utilisé équivaut à six blocs élémentaires, délimités par le volume d'influence de chaque trou de forage d'exploitation. Les décisions concernant l'équipement d'extraction étant prises deux fois par jour, trois blocs adjacents sont exploités consécutivement, en moyenne, avant que l'équipement ne soit relocalisé. De plus, son déplacement moyen équivaut à 8 blocs à partir du dernier point de travail.

En utilisant les données qui précèdent, il est possible de reconstituer le covariogramme dans le courant de matériel qui sort de la zone à l'aide d'équations simples. Pour chaque zone, il y a une équation différente, puisque certains paramètres diffèrent:

$$ZONE\ A:\ C_A(d) = 0.75(0.70C_{E-O}(h) + 0.30C_{N-S}(h)) + 0.25(0.70C_{E-O}(h+8) + 0.30C_{N-S}(h+8))$$

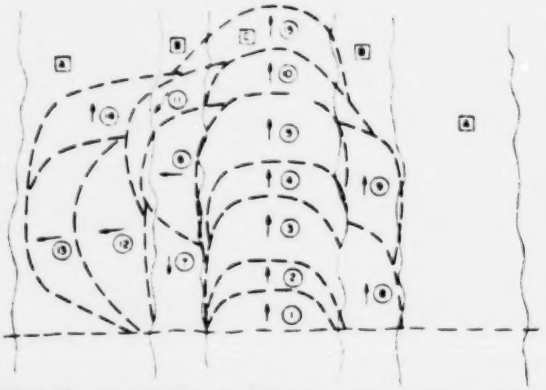

FIGURE 2. Représentation schématique d'une avance possible dans une zone donnée.

Notes:—A, B et C représentent des catégories de minerai.
—Chaque nombre représente une journée différente d'exploitation.
—Les flèches représentent la direction générale de l'avance ce jour-là.

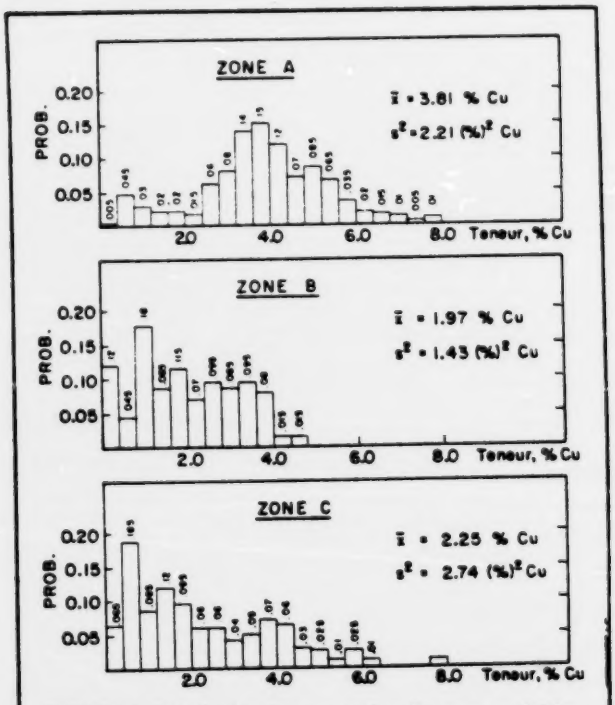

FIGURE 3. Distribution des teneurs dans les zones exploitées d'un gisement.

$$ZONE\ B:\ C_B(d) = 0.75(0.80C_{E-O}(h) + 0.20C_{N-S}(h)) + 0.25(0.80C_{E-O}(h+8) + 0.20C_{N-S}(h+8))$$

$$ZONE\ C:\ C_C(d) = 0.75(0.60C_{E-O}(h) + 0.40C_{N-S}(h)) + 0.25(0.60C_{E-O}(h+8) + 0.40C_{N-S}(h+8))$$

Dans ces équations, $C_i(d)$ représente le co-variogramme de production à une distance linéaire 'd' à la sortie de la zone 'i' (A, B ou C) entre échantillons, distance qui équivaut à l'espacement directionnel 'h' (N-S ou E-O) dans le gisement. Il s'agit donc de corrélations représentant la même grosseur de lot. Les fractions 0.75-0.25 représentent les déplacements de l'équipement, en ce sens que trois fois sur quatre, les lots à une distance 'd' dans le courant de matériel proviendront de lots distants de 'h' dans le gisement, alors que le quatrième lot de la série sera situé à 8 blocs de distance du précédent, d'où la corrélation à 'h+8'. Par ailleurs, les valeurs à l'intérieur des expressions proviennent des décisions directionnelles d'exploitation de chaque zone: par exemple, 70% du temps dans la direction E-O et 30% dans la direction perpendiculaire pour la zone A; ceci permet d'introduire les corrélations directionnelles initiales pour reconstituer le variogramme linéaire dans le courant de matériel à la sortie de la zone.

Le calcul de ces équations a été effectué à partir des données de corrélation in situ de la figure 1. Ces résultats apparaissent à la figure 4. Les co-variogrammes illustrés sur cette figure représentent la corrélation dans le matériel exploité à la sortie de chaque zone. En souterrain, l'ensemble du matériel extrait est habituellement considéré comme du minerai et constitue donc le courant de minerai à la sortie de chaque zone. Par contre, à ciel ouvert, ce matériel est constitué de minerai et de stérile; il faut alors dissocier ces deux produits selon des critères de sélection à préciser, quant à la teneur de coupure.

Teneurs de coupure

Normalement, la teneur de coupure varie d'une zone à l'autre, à cause de caractéristiques autres que la teneur. Par exemple, la dureté d'un minerai entraîne des coûts spécifiques de réduction de la granulométrie qui influencent son rendement économique. De même, la récupération du minéral ou métal de valeur fluctue d'une zone à l'autre et modifie l'attrait relatif des minerais en place.

Ces divers critères étant définis, il est possible de fixer la teneur minimale à laquelle un bloc minéralisé devient suffisamment attrayant pour justifier son extraction. C'est ce qui est appelé teneur de coupure et ce que désire connaître l'exploitant minier au stage de la production. Pour plus de simplicité, le présent exposé utilise une teneur de coupure constante pour les trois zones à l'étude. Cette teneur, appelée x_o, a été

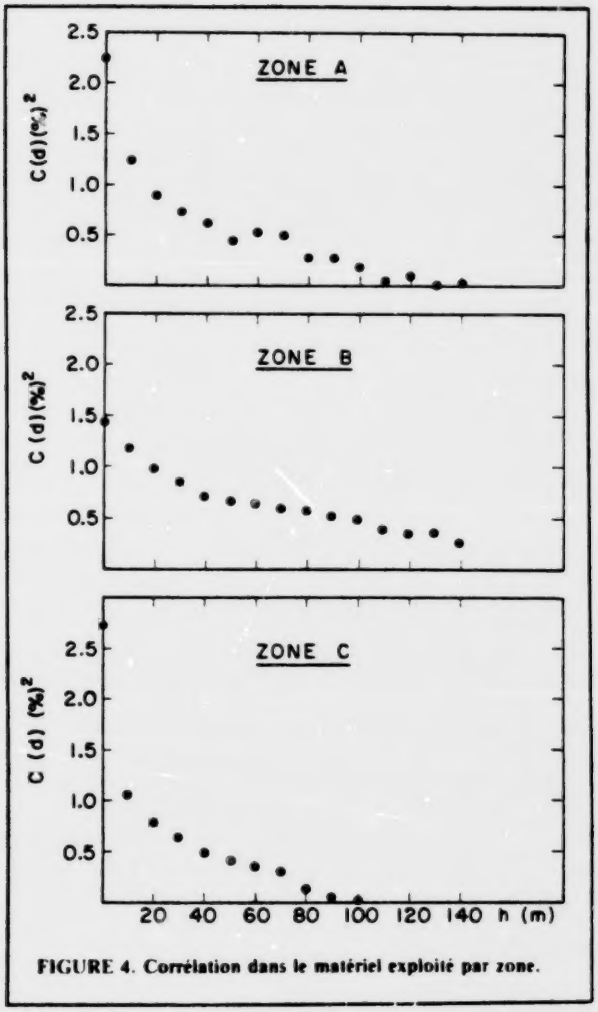

FIGURE 4. Corrélation dans le matériel exploité par zone.

fixée à 1,2%Cu pour chacune des distributions de la figure 3. En utilisant cette valeur, minerai et stérile se séparent en deux distributions, tel qu'illustré à la figure 5.

Il est ainsi facile de calculer moyenne et variance de chacune des nouvelles distributions dans chaque zone; ces valeurs apparaissent à la figure 5. Il est intéressant de souligner ici les proportions de minerai dans les distributions initiales: 92% dans la zone A, 65,5% dans la zone B et 66,5% dans la zone C.

La sélection appropriée des blocs rentables peut s'avérer difficile dans les zones B et C, compte tenu de la proportion plus élevée de stérile. Des erreurs de classification ont tendance à se produire dans de telles circonstances: des blocs marginaux seront classés comme minerai, alors qu'ils auraient dû être expédiés aux haldes de stériles et vice-versa. Ceci a comme conséquence d'abaisser la teneur moyenne du minerai exploité; il arrive assez souvent que des blocs supplémentaires soient expédiés à l'usine de traitement, ce qui accroît le taux apparent de minéralisation par rapport aux quantités planifiées.

Un autre point à souligner, c'est que la teneur de coupure implique toujours un taux de récupération de minerai spécifique à chaque zone. En pratique, il est très difficile de réagir à court terme aux variations du marché, et ces variations influencent énormément le choix de la teneur de coupure. Il faut prévoir, dans une exploitation minière, que la teneur de coupure du moment influencera les opérations et leur rendement économique pour une période de trois à six mois, selon la flexibilité de la méthode d'extraction.

Enfin, la teneur de coupure diminue la dispersion des teneurs du minerai par rapport aux variations observées dans l'ensemble du gisement. L'hétérogénéité du minerai augmente à mesure que s'accroît le taux d'extraction; ceci résulte de la diminution de la teneur de coupure et, suite à cette décision, de l'étalement plus grand de la distribution des teneurs dans le minerai. Le résultat de ces différents éléments combinés, c'est une modification de la corrélation dans le minerai à la sortie de la zone exploitée.

Corrélation dans le minerai à ciel ouvert

À ciel ouvert, la même pièce d'équipement sert le plus souvent à extraire tant le minerai que les stériles d'une zone donnée. La production de minerai alterne donc avec celle du stérile. Un modèle binômial permet d'expliquer cette alternance de suites de minerai et de stérile lors de l'exploitation d'une zone minéralisée. En effet, le choix d'extraire soit le minerai, soit le stérile, provient habituellement de décisions prises dans un endroit centralisé qui recherche le bien supérieur des opérations regroupées et non l'optimum particulier à une zone donnée. Ceci justifie le choix du modèle combinatoire pour exprimer les probabilités de suites de minerai et de stérile: en effet, du point de

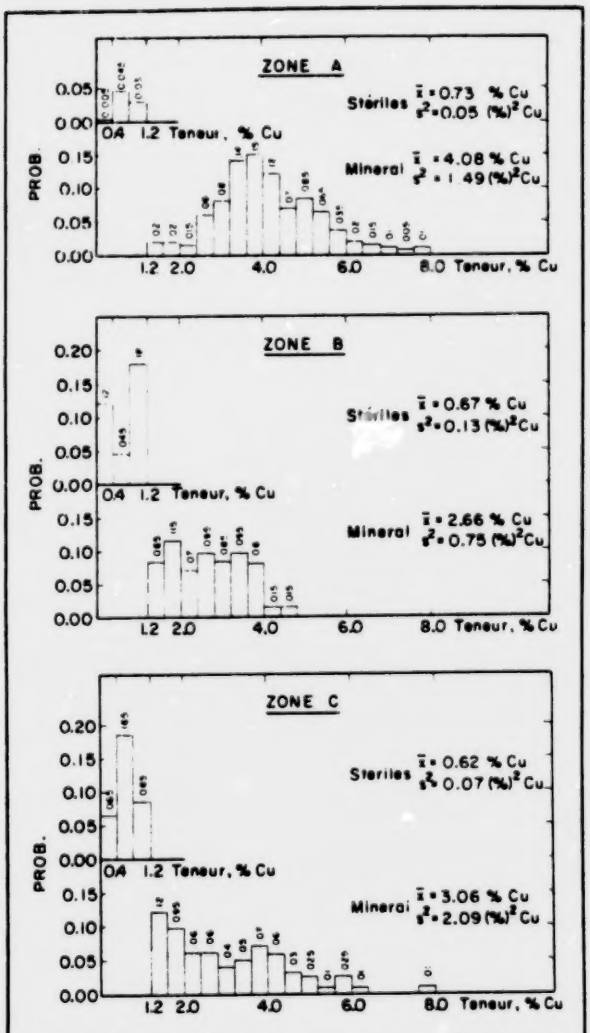

FIGURE 5. Distributions des teneurs dans le minerai et les stériles des zones exploitées à l'étape décisionnelle.

vue de la zone particulière, ces décisions de miner un produit ou l'autre peuvent paraître aléatoires.

En ce qui concerne la corrélation cependant, toutes ces décisions résultent en des suites de minerai ou de stérile de longueur variable, qui ne sont donc pas équivalentes. De plus, la longueur maximale de corrélation varie d'une zone à l'autre (figure 1). Dans la zone A (figure 1), la longueur maximale de corrélation est approximativement de 15 blocs, tandis qu'elle est de 18 blocs dans la zone B et de 11 blocs dans la zone C.

Ces longueurs de corrélation maximale dans chaque zone servent, combinées avec l'alternance de l'exploitation du minerai et du stérile, à formuler l'hypothèse que le modèle binômial peut exprimer la corrélation dans le minerai à la sortie de chaque zone, une fois modifié comme ci-dessous.

Le tableau 1 donne la probabilité d'une observation de longueur 'ℓ', variant de 1 à 'n', la longueur maximale de corrélation retenue pour chaque zone, selon la formule:

$$X_\ell = X_m^\ell (1 - X_m)^{(n-\ell)}$$

où X_m représente la proportion de minerai dans la zone 'm'.

Le modèle binomial contient 2^n probabilités combinatoires. Or, c'est l'observation de suites ininterrompues de minerai qui conditionne le degré de corrélation pour une longueur d'observation donnée. En effet, deux déplacements de l'équipement de chargement-transport équivaut à un déphasage d'au moins 16 blocs, ce qui rend négligeable la corrélation entre suites consécutives de minerai. De même, lorsqu'il y a bris de l'équipement, il y a interruption de la suite de blocs exploités et les décisions de minage à la reprise exigent habituellement l'extraction de blocs de minerai indépendants de ceux préalablement exploités.

Comment peut-on exprimer les probabilités de rencontrer l'une ou l'autre séquence de minerai? À titre d'exemple, les possibilités d'observer des suites ininterrompues de 8 unités consécutives de minerai seront utilisées pour démontrer le principe, lorsque n=11 unités, la longueur maximale de corrélation dans la zone C. Ces possibilités sont:

i) quand il y a 10 unités de minerai sur 11 unités au total dans le lot:

8M + 1S + 2M

2M + 1S + 8M

TABLEAU 1: Probabilité d'une observation de longueur ℓ dans le minerai de trois zones

ℓ	Zone A	Zone B	Zone C
0	0.0	0.000 000 005	0.000 005 963
1	0.0	0.000 000 009	0.000 011 838
2	0.0	0.000 000 017	0.000 023 499
3	0.0	0.000 000 033	0.000 046 647
4	0.0	0.000 000 062	0.000 092 598
5	0.0	0.000 000 118	0.000 183 813
6	0.0	0.000 000 225	0.000 364 883
7	0.000 000 001	0.000 000 426	0.000 724 320
8	0.000 000 011	0.000 000 809	0.001 437 830
9	0.000 000 124	0.000 001 537	0.002 854 200
10	0.000 001 423	0.000 002 917	0.005 665 800
11	0.000 016 369	0.000 005 538	0.011 247 036
12	0.000 188 245	0.000 010 515	
13	0.002 164 820	0.000 019 963	
14	0.024 895 426	0.000 037 901	
15	0.266 297 404	0.000 071 958	
16		0.000 136 615	
17		0.000 259 371	
18		0.000 492 429	
Formule: $X_m^{\ell}(1 - X_m)^{n-\ell}$			

ii) quand il y a 9 unités de minerai dans le lot de 11 unités au total:

8M + 2S + 1M

8M + 1S + 1M + 1S

1S + 8M + 1S + 1M

1S + 1M + 1S + 8M

1M + 1S + 8M + 1S

1M + 2S + 8M

iii) quand il y a 8 unités de minerai dans le lot de 11 unités au total:

8M + 3S

1S + 8M + 2S

2S + 8M + 1S

3S + 8M

Cependant, quand il y a 9 ou 10 unités de minerai dans le lot de 11 unités au total, les observations de 8 lots de minerai apparaissent en même temps que d'autres lots de minerai de dimension différente. Il faut alors redistribuer adéquatement les 2^n probabilités pour éviter la redondance. Il existe en fait $2^{n-\ell}$ possibilités de retrouver ℓ unités consécutives de minerai dans un lot contenant 'n' unités au total dans la mine. En prenant $i = n - \ell$, les 2^i observations des diverses longueurs se répartissent comme suit:

$$\binom{i}{i} = 1$$

observation pondérée de longueur ℓ dans un groupe en contenant (n-1);

$$\binom{i}{i-1} = i$$

observations de longueur ℓ dans un groupe en contenant (n-2);

$$\binom{i}{i-2} = \frac{i(i-1)}{2!}$$

observations de longueur ℓ dans un groupe en contenant (n-3);

$$\binom{i}{i-3} = \frac{i(i-1)(i-2)}{3!}$$

observations de longueur ℓ dans un groupe en contenant (n-4); et ainsi de suite jusqu'à la longueur ℓ dans un groupe en contenant ℓ où il faut alors additionner les deux derniers termes de la série:

$$\binom{i}{1} + \binom{i}{0} = i + 1$$

observations de longueur ℓ dans un groupe en contenant exactement ℓ.

Pour revenir à l'exemple précédent, en utilisant le tableau 1 et les valeurs 1, 3 et 4 comme probabilités respectives pour les longueurs 10, 9 et 8 unités de minerai, la probabilité globale de rencontrer $\ell = 8$ unités de minerai dans le lot de 11 unités de matériel se calcule comme ceci (zone C):

$$1 \times 0.005665800 + 3 \times 0.002854200 + 4 \times 0.001437830$$

TABLEAU 2: Contribution relative de la longueur ℓ d'observation à la variabilité/corrélation du minerai à la sortie des zones

ℓ	Zone A	Zone B	Zone C
1	0.08000	0.34499	0.33501
2	0.07360	0.22597	0.22279
3	0.06771	0.14801	0.14177
4	0.06230	0.09695	0.09856
5	0.05731	0.06350	0.06560
6	0.05273	0.04159	0.04375
7	0.04851	0.02724	0.02933
8	0.04463	0.01784	0.01998
9	0.04106	0.01169	0.01423
10	0.03777	0.00752	0.01133
11	0.03477	0.00502	0.01125
12	0.03214	0.00329	
13	0.03139	0.00216	
14	0.04979	0.00143	
15	0.28630	0.00096	
16		0.00067	
17		0.00052	
18		0.00049	

qui cède la valeur 0.01 998 du tableau 2, zone C, pour une longueur d'observation ℓ = 8 unités. Effectuer l'ensemble de ces calculs pour les trois zones considérées permet de compléter le tableau 2.

Chacune des valeurs du tableau 2 indique la contribution relative d'une longueur ℓ quelconque à la variabilité totale dans la zone lorsqu'on somme ℓ de 1 à n, et sa contribution relative à la corrélation lorsque la somme s'effectue de ℓ=n à ℓ=1. En additionnant les colonnes du tableau 2 de haut en bas, on obtient donc des semi-variogrammes standardisés, tandis qu'en sommant les mêmes colonnes de bas en haut, on obtient des co-variogrammes standardisés. Le tableau 3 illustre ces semi-variogrammes et co-variogrammes standardisés dans les trois zones à l'étude.

En multipliant les valeurs du tableau 3 par la variance du minerai dans chaque zone (figure 5), on reconstitue les semi-variogrammes et co-variogrammes dans le minerai exploité. Le tableau 4 illustre ces résultats.

TABLEAU 3: Variogrammes et covariogrammes standardisés du minerai à la sortie de chaque zone

ℓ	Zone A		Zone B		Zone C	
	$C(\ell)/C(0)$	$\gamma(\ell)/C(0)$	$C(\ell)/C(0)$	$\gamma(\ell)/C(0)$	$C(\ell)/C(0)$	$\gamma(\ell)/C(0)$
1	0.92000	0.08000	0.65501	0.34499	0.66499	0.33501
2	0.84640	0.15360	0.42904	0.57096	0.44220	0.55780
3	0.77869	0.22131	0.28103	0.71897	0.30043	0.69957
4	0.71639	0.28361	0.18408	0.81592	0.20187	0.79813
5	0.65908	0.34092	0.12058	0.87942	0.13627	0.86373
6	0.60635	0.39365	0.07899	0.92101	0.09252	0.90748
7	0.55784	0.44216	0.05175	0.94825	0.06319	0.93681
8	0.51321	0.48679	0.03391	0.96609	0.04321	0.95679
9	0.47215	0.52785	0.02222	0.97778	0.02898	0.97102
10	0.43438	0.56562	0.01470	0.98530	0.01765	0.98235
11	0.39961	0.60039	0.00968	0.99032		
12	0.36747	0.63253	0.00639	0.99361		
13	0.33608	0.66392	0.00423	0.99577		
14	0.28630	0.71371	0.00280	0.99720		
15		1.00001	0.00184	0.99816		
16			0.00117	0.99883		
17			0.00065	0.99935		
18				0.99984		

TABLEAU 4: Variogrammes et covariogrammes dans le minerai à la sortie de chaque zone

ℓ	Zone A		Zone B		Zone C	
	$C(\ell)$	$\gamma(\ell)$	$C(\ell)$	$\gamma(\ell)$	$C(\ell)$	$\gamma(\ell)$
1	1.371	0.119	0.491	0.259	1.390	0.700
2	1.261	0.229	0.322	0.428	0.924	1.166
3	1.160	0.330	0.211	0.539	0.628	1.462
4	1.067	0.423	0.138	0.612	0.422	1.668
5	0.982	0.508	0.090	0.660	0.285	1.805
6	0.903	0.587	0.059	0.691	0.193	1.897
7	0.831	0.659	0.039	0.711	0.132	1.958
8	0.765	0.725	0.025	0.725	0.090	2.000
9	0.703	0.787	0.017	0.733	0.061	2.029
10	0.647	0.843	0.011	0.739	0.037	2.053
11	0.595	0.895	0.007	0.743		
12	0.548	0.942	0.005	0.745		
13	0.501	0.989	0.003	0.747		
14	0.427	1.063	0.002	0.748		
15			0.001	0.749		
16			0.001	0.749		
17			0	0.750		
18						

Effet de la cédulation

Le modèle précédent s'applique à une opération sans flexibilité, telle que roue-pelle ou dragline. Dans les opérations conventionnelles en fosse avec pelles ou chargeurs et camions, le déplacement du front d'attaque s'effectue plus rapidement et les opérateurs ou planificateurs utilisent régulièrement cette flexibilité.

Il fut mentionné précédemment que les décisions étaient modifiées deux fois par jour et qu'elles forçaient un déplacement de l'équipement de 8 blocs en moyenne. En appliquant ces données comme plus haut (pour obtenir la figure 4), l'équation ci-dessous permet de reconstituer les co-variogrammes de la figure 6 à partir des données du tableau 4:

$$C(d) = 0.75C(\ell) + 0.25C(\ell + 8)$$

Effet de la disponibilité de l'équipement

Dans les zones fortement minéralisées comme la zone A de l'exemple, l'effet d'un bris d'équipement tend à accroître les suites de minerai exploitées consécutivement, parce que les bris se produisent presque toujours lorsque l'unité de production extrait du minerai. À la remise en service de cette pièce d'équipement, la demande de minerai est encore plus accentuée qu'au moment du bris, parce que les planificateurs comptent sur le minerai de cette zone pour équilibrer leur alimentation à l'usine minéralurgique. Ceci entraîne des suites de minerai plus longues que d'habitude, ce qui tend à accroître la corrélation dans le minerai par rapport au modèle général élaboré ci-dessus.

Par contre, dans les zones moins fortement minéralisées, comme les zones B et C de l'exemple, il est plus fréquent de voir ces unités de production excaver des stériles. La planification des opérations n'exige pas une reprise de l'activité dans le minerai à la remise en service de la pièce. Dans ces zones, l'effet d'un bris a donc tendance à raccourcir les suites de minerai exploitées; conséquemment, la variabilité dans le minerai quittant la zone augmente par rapport au modèle élaboré à la section précédente.

Si la disponibilité de l'équipement se situe autour de 80%, il faut alors augmenter la corrélation dans la zone A en divisant les valeurs du co-variogramme de la figure 6 par 0,8. Il faut par contre réduire la corrélation dans les zones B et C en multipliant les résultats apparaissant à la figure 6 par 0,8. Le résultat de cette opération est représenté à la figure 7; il s'agit de la corrélation réelle qui existe dans le courant de minerai à la sortie d'une zone de production dans une mine à ciel ouvert.

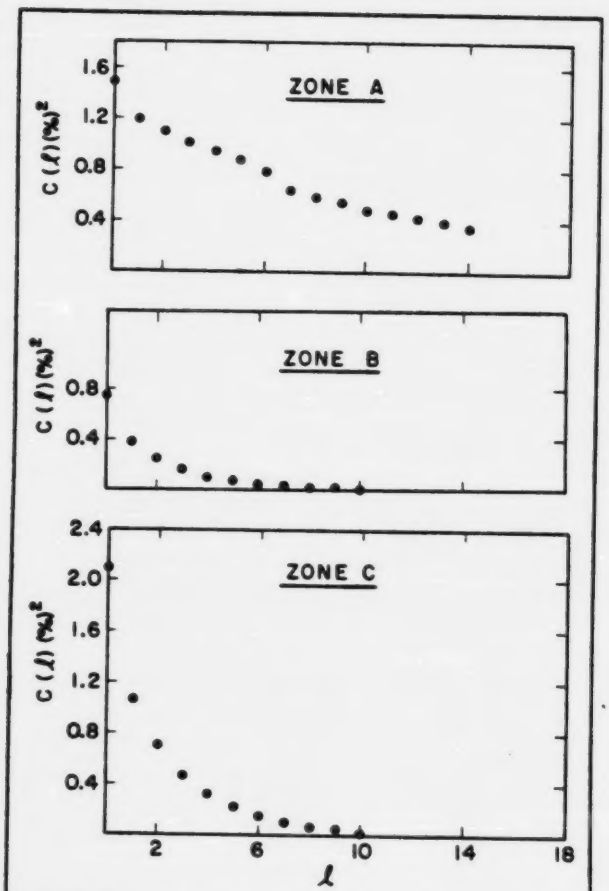

FIGURE 6. Convariogrammes à la sortie des zones sans tenir compte de la disponibilité de l'équipement.

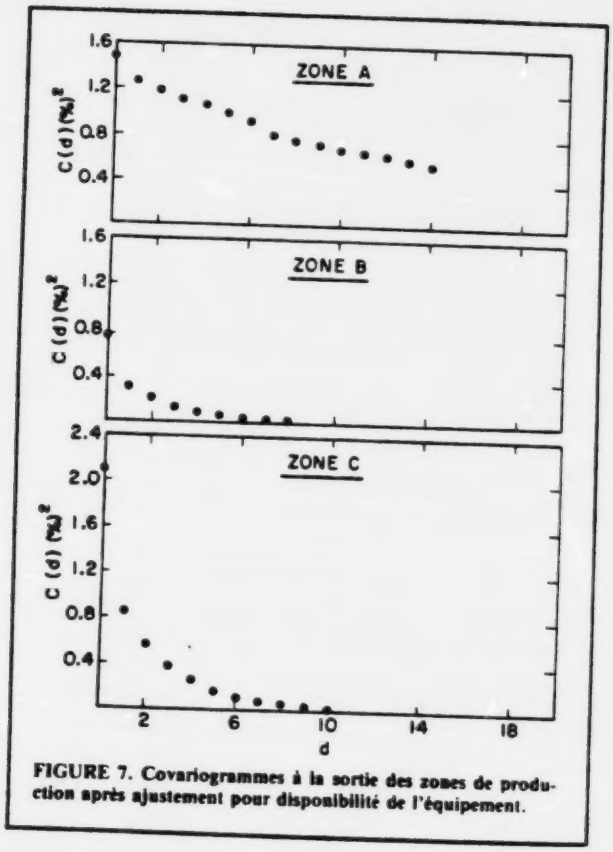

FIGURE 7. Covariogrammes à la sortie des zones de production après ajustement pour disponibilité de l'équipement.

CHAPITRE 3: REGROUPEMENT DES FRONTS

Il existe un certain nombre de cas à considérer lorsque plusieurs fronts d'attaque sont regroupés en un seul courant: la première question à répondre est sans contredit la définition de variance et corrélation interne des lots en provenance d'une même zone; le chapitre qui précède a permis d'élaborer un modèle cohérent concernant ce problème. Le second point à soulever concerne la corrélation entre les fronts; lorsque ceux-ci sont indépendants, le traitement statistique est grandement simplifié par rapport au cas contraire. Le troisième sujet à considérer lorsque ces courants sont regroupés, c'est l'existence potentielle de d'entrepôts intermédiaires qui modifient les propriétés du courant de minerai préalablement définies, des accumulateurs par exemple.

3.1 *Fronts sans corrélation entre eux*

Lorsque les fronts sont suffisamment éloignés l'un de l'autre, c'est-à-dire quand cette distance excède la portée de la corrélation dans le gisement, les matériaux provenant de ces zones ne sont plus correlés. Le traitement statistique qui s'applique alors pour reconstituer la corrélation dans le courant résultant s'en trouve par le fait même simplifié.

Deux cas doivent être examinés: celui où il n'existe aucune corrélation interne au front même et le cas où une certaine corrélation est présente dans le minerai à la sortie d'une zone, comme c'est le cas dans les trois zones du chapitre qui précède.

cas 1: aucune corrélation au front même

Cette situation se présente lorsque le minerai est distribué de façon erratique. Une mesure statistique indiquant une corrélation inférieure à 20% du niveau de la variance peut, en pratique, être considérée comme n'étant pas significative et ramenée au cas plus simple de l'absence de corrélation interne au front même. Cette situation se retrouve fréquemment dans les gisements d'or où la continuité est habituellement très restreinte dans l'espace tridimensionnel.

Le mélange qui se produit à un point donné de transfert peut alors s'exprimer par une distribution multinômiale, assimilable à la sélection de boules de couleurs différentes dans une urne, selon l'expression suivante:

provenance (front):	1, 2, 3, ..., k
proportion:	$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$

avec comme condition:

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$$

Ceci signifie que la somme des proportions P_i des courants individuels reconstitue la totalité du courant résultant.

Il y a habituellement plus de 100 blocs élementaires dans chaque zone minéralisée d'un gisement en exploitation; ces blocs peuvent être considérés indépendants et remplaçables par un nouveau bloc lorsque minés. La théorie permet alors d'utiliser un modèle binômial ou multinômial, assimilable à la remise des boules de couleurs différentes dans l'urne une fois tirées, afin de maintenir constantes les proportions de chaque couleur. Lorsqu'on veut extraire n blocs du gisement dont ν_i blocs du front 'i', on obtient:

front:	1, 2, 3, ..., k
nombre observé:	$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_k$

avec comme condition:

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i = n$$

Étant donné que les blocs extraits de chaque zone sont remplacés par un autre bloc de la zone, les probabilités 'PR' suivantes expriment la proportion du temps où la combinaison ci-dessus peut se rencontrer:

$$PR(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots \nu_k) = \frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3! \ldots \nu_k!} P_1^{\nu_1} P_2^{\nu_2} P_3^{\nu_3} \ldots P_k^{\nu_k}$$

La teneur moyenne $\overline{X}$ est obtenue en fonction des proportions P_i de minerai originant de chaque zone et des teneurs moyennes X_i de chacune d'elles:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} P_i X_i$$

La variance $S_x^2(1)$ des lots de dimension unitaire est donnée par l'expression:

$$S_x^2(1) = \sum_{i=1}^{k} P_i \, (X_i - \overline{X})^2$$

Cette expression présuppose que les blocs sont manipulés indépendamment les uns des autres. En pratique, si les unités de transfert sont plus petites que le bloc unitaire, cette variance constitue une limite supérieure et, nonobstant des points de ségrégation dans le système, les variations de teneur devraient être inférieures à la valeur calculée. Cette équation suppose également qu'il y a homogénéité de teneur à l'intérieur du bloc unitaire et entre blocs unitaires provenant d'une même zone. Dans les faits, cette hypothèse n'est pas réaliste et il faut alors additionner à cette variance

l'impact des oscillations de teneur dans chaque zone. Cette complexité additionnelle sera introduite plus loin dans le texte.

En utilisant la logique présentée ci-dessus, la variance $S_x^2(n)$ des lots de n blocs amalgamés est donnée par l'expression:

$$S_x^2(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} P_i \, (X_i - \overline{X})^2 = \frac{S_x^2(1)}{n}$$

À titre d'exemple, voici le cas de deux courants de minerai, chacun de teneur stationnaire (variance nulle), dont la production arrive à un point de transfert de façon aléatoire:

courant 1: $P_1 = 0{,}40$ $\quad \overline{X}_1 = 20\%\ SiO_2$

courant 2: $P_2 = 0{,}60$ $\quad \overline{X}_2 = 5\%\ SiO_2$

Quand 5 lots (5 blocs) sont prélevés au hasard dans le courant résultant, le modèle binômial permet alors d'exprimer la probabilité de rencontrer l'une ou l'autre des différentes combinaisons possibles suivantes:

$$P(5,0) = \binom{5}{5} 0,6^5 \times 0,4^0 = 0,0778 \qquad et\ \overline{X} = 20\%SiO_2$$

$$P(4,1) = \binom{5}{4} 0,6^4 \times 0,4^1 = 0,2592 \qquad et\ \overline{X} = 17\%SiO_2$$

$$P(3,2) = \binom{5}{3} 0,6^3 \times 0,4^2 = 0,3456 \qquad et\ \overline{X} = 14\%SiO_2$$

$$P(2,3) = \binom{5}{2} 0,6^2 \times 0,4^3 = 0,2304 \qquad et\ \overline{X} = 11\%SiO_2$$

$$P(1,4) = \binom{5}{1} 0,6^1 \times 0,4^4 = 0,0768 \qquad et\ \overline{X} = 8\%SiO_2$$

$$P(0,5) = \binom{5}{0} 0,6^0 \times 0,4^5 = 0,0102 \qquad et\ \overline{X} = 5\%SiO_2$$

La teneur moyenne $\overline{X}$ dans le courant résultant s'obtient comme suit:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{2} P_i X_i = 0,6 \times 0,20 + 0,4 \times 0,05 = 14\%SiO_2$$

La variance $S_x^2(1)$ de lots unitaires dans ce courant résultant est obtenue à l'aide de l'expression:

$$\begin{aligned} S_x^2(1) &= \sum_{i=1}^{2} P_i (X_i - \overline{X})^2 \\ &= 0,6\,(0,20 - 0,14)^2 + 0,4\,(0,05 - 0,14)^2 \\ &= 21,60(\%)^2 + 32,40(\%)^2 \\ &= 54,00(\%)^2 \end{aligned}$$

La variance d'un ensemble de 5 lots regroupés, $S_x^2(5)$, se calcule comme suit:

$$\begin{aligned} S_x^2(5) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{2} P_i (X_i - \overline{X})^2 &= \frac{1}{5}\, S_x^2(1) \\ &= \frac{1}{5}\, 54,00(\%)^2 \\ &= 10,80(\%)^2 \end{aligned}$$

Pour l'ensemble des 5 lots regroupés, la variance peut aussi être calculée de la façon suivante, en utilisant les proportions $P(i, n-i)$ calculées plus haut à l'aide de la binômiale, avec 'i' variant de 0 à 'n':

$$\begin{aligned} S_x^2(5) &= \sum_{i=0}^{5} P(i, n-i)\,(X_i - \overline{X})^2 \\ &= 0,0778 \times (20 - 14)^2 + 0,2592 \times (17 - 14)^2 + 0,3456 \times (14 - 14)^2 \\ &\quad + 0,2304 \times (11 - 14)^2 + 0,0768 \times (8 - 14)^2 + 0,0102 \times (5 - 14)^2 \\ &= 2,8008 + 2,3328 + 0 + 2,0736 + 2,7648 + 0,8262 \\ &= 10,7982(\%)^2 \simeq 10,80(\%)^2 \end{aligned}$$

La différence entre les deux résultats provient des arrondis lors du calcul des proportions $P(i, n-i)$ qui précède.

Cas 2: Corrélation existant dans le courant provenant des zones

Dans les chapitres antérieurs, le travail s'est déroulé en utilisant des modèles continus dont certains points étaient calculés. À partir de maintenant, les modèles utilisés seront du type discret. Aussi, est-il important d'introduire ici la notion de **coefficient d'autocorrélation** $\varphi_{xx}(i, n)$: il s'agit de la corrélation mesurée à partir du co-variogramme pour une grosseur de lot 'n' et pour une distance 'i' quelconque séparant les blocs. En fait, la distance 'i' doit maintenant être définie comme un certain nombre de blocs unitaires séparant les deux blocs considérés.

Lorsqu'il existe de la corrélation entre blocs d'un courant de minerai, la variance d'un lot de grosseur 'n' est supérieure à celle obtenue dans la section précédente lorsque la corrélation n'était pas significative. Le phénomène physique peut être assimilé à la répartition sélective de boules d'une couleur donnée dans une urne: si l'on pige dans la région de l'urne où sont concentrées ces boules, la probabilité de soutirer des boules de cette couleur est plus élevée que la moyenne, alors que si l'on pige ailleurs, cette probabilité est inférieure à la moyenne à cause des concentrations. Par conséquent, le courant résultant sera tantôt plus 'riche' en boules de la couleur choisie, tantôt plus pauvre. Cette oscillation de la teneur dans un courant de minerai est bien connue, et c'est ce qui crée les liens de parenté entre blocs voisins. Elle a comme conséquence, lors de la jonction de plusieurs courants individuels en un courant unique, d'accroître les variations de teneur dans le courant résultant par rapport à la situation présentée pour le cas 1, où ces tendances au regroupement de blocs de teneur comparable n'existaient pas.

Par conséquent, la variance $S_x^2(1)$ des lots de grosseur unitaire s'obtient en additionnant les variances individuelles de chaque courant, selon leur proportion dans le courant résultant, aux fluctuations relatives obtenues par les déviations de teneur de chaque courant par rapport à la teneur moyenne du lot résultant.

$$S_R^2(1) \;=\; \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}\,(\overline{X}_{x_j} - \overline{X}_R)^2 \;+\; \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2\, S_{x_j}^2\,(1)$$

où P_{x_j} représente l'apport du courant x_j dans le courant constitué des 'k' courants initiaux; $\overline{X}_{x_j}$ est la teneur moyenne dans le courant initial x_j et $\overline{X}_R$ celle du courant R résultant; $S_{x_j}^2(1)$ est la variance du courant initial x_j et $S_R^2(1)$ celle du courant R résultant.

En pratique, il s'agit là d'une borne supérieure jamais atteinte pour la variance, qui considère d'une part les blocs comme des entités manipulées séparément (première partie de l'expression), et d'autre part les blocs du courant 'R' résultant comme constitués en proportions parfaites d'unités provenant de chaque courant initial. En réalité, ces blocs sont acheminés de façon fractionnée dans le courant 'R' résultant, de sorte que la seconde partie contribue davantage à la variance totale lorsque les unités de transfert sont très petites par rapport au bloc élémentaire; la contribution de la première partie de l'expression devient alors négligeable, puisque la teneur moyenne de chaque bloc du courant 'R' ne fluctue plus en fonction des différences de teneur des courants initiaux.

Par conséquent, la formule précédente doit être amendée pour tenir compte de cette réalité:

$$S_R^2(1) \;=\; S_1 \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}\,(\overline{X}_{x_j} - \overline{X}_R)^2 \;+\; (1 - S_1) \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2\, S_{x_j}^2\,(1)$$

où S_1 représente la sélectivité relative des courants initiaux dans le courant 'R' résultant, au niveau des blocs élémentaires. S_1 est défini selon la grandeur de l'unité de transport par rapport aux blocs unitaires à extraire et par le nombre de fronts opérationnels.

Par ailleurs, les coefficients d'autocorrélation $\varphi_{RR}(\ell, 1)$ espacés d'une distance ℓ dans le courant résultant sont obtenus à partir des coefficients des courants initiaux:

$$\varphi_{RR}(\ell,1) = \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2 \, \varphi_{x_j x_j}(\ell,1)$$

où $\varphi_{x_j x_j}(\ell, 1)$ représente la corrélation entre lots unitaires espacés d'un nombre ℓ de blocs dans le courant x_j; 'k' indique le nombre de courants initiaux (ou fronts) constituant le courant résultant.

Le développement de ces formules apparaît à l'appendice 'A'.

exemple

À titre d'exemple, les co-variogrammes de la figure 7 peuvent être appelés à former un courant dans les proportions suivantes: 40% de la zone 'A', 30% de la zone 'B' et autant de la zone 'C'. Compte tenu du nombre de fronts en opération et en considérant que l'équipement de transfert est au moins 20 fois plus petit que le bloc unitaire, la valeur de S_1 est estimée à 0,05. Ces proportions permettent alors de reconstituer variance et corrélation dans le courant résultant comme suit:

$$\begin{aligned} S_R^2(1) &= 0,95\,[0,40^2 \times 1,49(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,75(\%)^2 + 0,30^2 \times 2,09(\%)^2] \\ &\quad + 0,05\,[0,40\,(4,08(\%) - 3,35(\%))^2 + 0,30\,(2,66(\%) - 3,35(\%))^2 \\ &\quad + 0,30\,(3,06(\%) - 3,35(\%))^2] \\ &= 0,49(\%)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{RR}(1,1) &= 0,40^2 \times 1,524(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,466(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,852(\%)^2 \\ &= 0,36(\%)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{RR}(2,1) &= 0,40^2 \times 1,402(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,305(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,567(\%)^2 \\ &= 0,30(\%)^2 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

À l'aide des valeurs calculées selon la procédure ci-dessus, il est possible d'élaborer la corrélation qui existe dans le courant de minerai R. La figure 8 illustre la corrélation dans le courant 'R' résultant d'une combinaison des trois zones à raison de 40% de la zone 'A', 30% de la zone 'B' et 30% de la zone 'C'. D'autres combinaisons peuvent aussi être calculées, de sorte qu'il existe une infinité de possibilités de courbes de corrélation

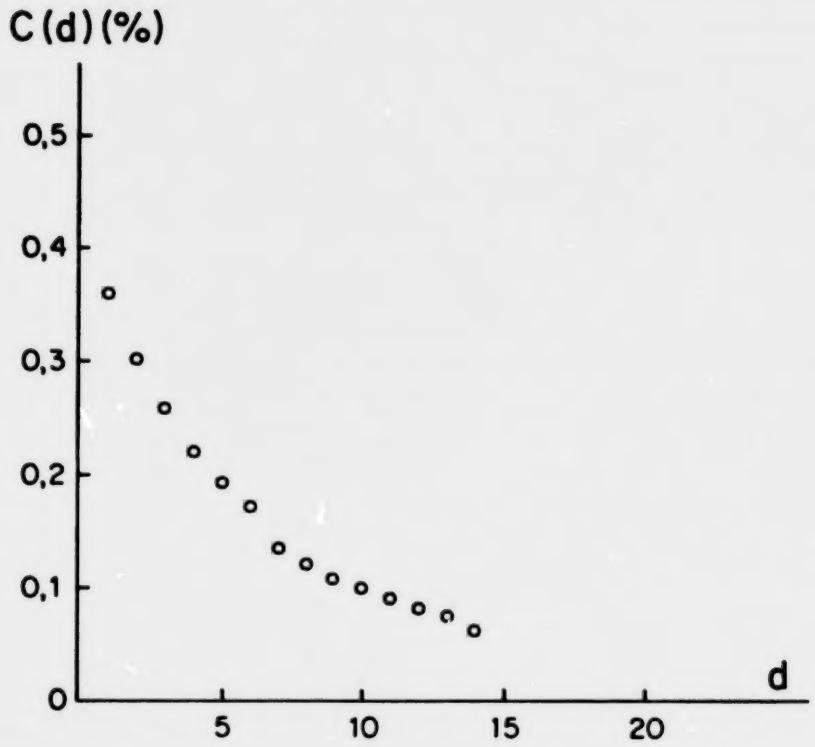

Figure 8: Co-variogramme à l'entrée d'un concentrateur.

dans le courant résultant, dépendant de la proportion exploitée de chaque zone. Il existe cependant des bornes à cette gamme de possibilités qui sont en fait la corrélation reconstituée à la sortie de chaque zone, après avoir inclus les effets de la cédulation et de la disponibilité de l'équipement (figure 7).

3.2 Cas des lots de dimension supérieure à celle du bloc

En pratique, il arrive fréquemment que l'opérateur soit intéressé à connaître les caractéristiques du courant pour des lots de dimensions plus grandes que le bloc unitaire. Il est toujours possible d'obtenir ces caractéristiques à partir de l'information initiale.

La variance $S_z^2(n)$ d'un lot de grosseur 'n' dans le courant de minerai est influencée

par la corrélation interne du courant:

$$S_x^2(n) = \frac{1}{n} S_x^2(1) + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\,\varphi_{xx}(i,1)$$
$$= \frac{1}{n} S_x^2(1) + \frac{2}{n^2} [(n-1)\,\varphi_{xx}(1,1) + (n-2)\,\varphi_{xx}(2,1)$$
$$+ \ \ldots \ + \ (n-(n-1))\,\varphi_{xx}((n-1),1)]$$

où $\varphi_{xx}(i,1)$ représente la corrélation dans le courant de blocs unitaires espacés de 'i' blocs intermédiaires, et les autres termes ont déjà été définis dans la section précédente du texte.

De même, les coefficients d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\ell,n)$ des lots de grosseur 'n' espacés de ℓ lots entre eux sont obtenus à partir des coefficients d'autocorrélation des blocs unitaires de la façon suivante:

$$\varphi_{xx}(\ell,n) = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^{n} i \times \varphi_{xx}(i + n(\ell-1),1) \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{xx}(i + n\ell,1)\right]$$

Le développement de ces équations est fait à l'appendice 'B'.

À titre d'exemple de calcul, la corrélation du courant de minerai de la zone C (figure 7) a servi à reconstituer variance et coefficients d'autocorrélation de lots de grosseur supérieure à celle des blocs unitaires. Tout d'abord, la variance de diverses grosseurs de lots est donnée par:

$$S_x^2(2) = \frac{1}{2} \times 2,09(\%)^2 + \frac{2}{2^2}[(2-1) \times 0,852(\%)^2]$$
$$= 1,47(\%)^2$$

$$S_x^2(4) = \frac{1}{4} \times 2,09(\%)^2 + \frac{2}{4^2}[(4-1) \times 0,852(\%)^2$$
$$+ \ (4-2) \times 0,567(\%)^2 \ + \ (4-3) \times 0,384(\%)^2]$$
$$= 1,03(\%)^2$$

$$S_x^2(7) = \frac{1}{7} \times 2,09(\%)^2 + \frac{2}{7^2}[(7-1) \times 0,852(\%)^2$$
$$+ \ (7-2) \times 0,567(\%)^2 \ + \ (7-3) \times 0,384(\%)^2$$
$$+ \ (7-4) \times 0,253(\%)^2 \ + \ (7-5) \times 0,171(\%)^2$$
$$+ \ (7-6) \times 0,116(\%)^2]$$
$$= 0,74(\%)^2$$

et ainsi de suite pour les autres grosseurs de lot. Il faut noter que la somme des coefficients $\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)$ est toujours égale à l'unité.

De la même manière, l'application de la formule des coefficients d'autocorrélation permet d'obtenir une série de valeurs pour des lots de grosseur donnée:

$$\varphi_{xx}(1,2) = \frac{1}{2^2}\left[(1 \times 0,852(\%)^2 + 2 \times 0,567(\%)^2) + ((2-1) \times 0,384(\%)^2)\right]$$
$$= 0,593(\%)^2$$

$$\varphi_{xx}(3,2) = \frac{1}{2^2}\left[(1 \times 0,171(\%)^2 + 2 \times 0,116(\%)^2) + ((2-1) \times 0,079(\%)^2)\right]$$
$$= 0,121(\%)^2$$

$$\varphi_{xx}(5,2) = \frac{1}{2^2}\left[(1 \times 0,037(\%)^2 + 2 \times 0,022(\%)^2) + ((2-1) \times 0,0(\%)^2)\right]$$
$$= 0,020(\%)^2$$

puisque $\varphi_{xx}(11,1)$ est nul.

La même procédure de calcul permet de reconstituer variance et autocorrélation dans le courant pour diverses grosseurs de lots. Il est facile de constater qu'après avoir regroupé un certain nombre de blocs élémentaires, la corrélation entre les lots résultants n'existe plus ou devient négligeable. Ces grosseurs de lots peuvent ensuite être traitées à l'aide des statistiques simples de la section précédente.

Calculs de corrélation et variance dans les lots de dimension supérieure au bloc unitaire et constitués de plusieurs zones

Dans un courant 'R' résultant, tel que celui illustré à la figure 8, il est possible d'obtenir la corrélation de lots de dimension supérieure au bloc élémentaire de deux façons différentes: d'une part, en utilisant les formules définies ci-dessus pour les courants simples de diverses grosseurs; d'autre part, en reconstituant ces lots à partir de leur contrepartie des courants individuels, comme c'est le cas dans le courant résultant de dimension unitaire à partir de l'apport relatif des courants individuels au courant 'R'. Par conséquent, $S_R^2(n)$ s'obtient selon les deux formules qui suivent:

$$S_R^2(n) = \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2 \, S_{x_j}^2(n)$$

ou

$$S_R^2(n) = \frac{1}{n} S_R^2(1) + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, \varphi_{RR}(i,1)$$

Il en va de même pour les coefficients d'autocorrélation des lots de grosseur 'n' du courant 'R':

$$\varphi_{RR}(\ell,n) = \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2 \, \varphi_{x_j x_j}(\ell,n)$$

ou

$$\varphi_{RR}(\ell,n) \;=\; \frac{1}{n^2}\Big[\sum_{j=1}^{n} j \times \varphi_{RR}(j+n(\ell-1),1) \;+\; \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\varphi_{RR}(j+n\ell,1)\Big]$$

Il est facile de démontrer l'équivalence de ces formules à partir des hypothèses initiales ou des démonstrations des appendices 'A' et 'B'.

3.3 *Corrélation présente entre les fronts*

Dans ce cas, la formule développée à l'appendice 'A' s'applique intégralement et la variance $S_R^2(1)$ de lots constitués de blocs élémentaires s'obtient comme suit:

$$S_R^2(1) \;=\; S_1 \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}(\overline{X}_{x_j} - \overline{X}_R)^2 \;+\; (1-S_1)\Big[\sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2\, S_{x_j}^2(1) + \;2\times\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k} P_{x_j}\, P_{x_i}\, \varphi_{x_j\, x_i}(d_{ji},1)\Big]$$

où d_{ji} représente la distance moyenne séparant les fronts 'i' et 'j' et en ajoutant la condition suivante à l'équation ci-dessus:

$$i \;\neq j$$

De même, les coefficients d'autocorrélation dans le courant 'R' peuvent être calculés à l'aide de la formule suivante:

$$\varphi_{RR}(\ell,1) \;=\; \sum_{j=1}^{k} P_{x_j}^2\, \varphi_{x_j\, x_j}(\ell,1) + \;2\times\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k} P_{x_j}\, P_{x_i}\varphi_{x_j\, x_i}(d_{ji}\pm\ell,1)$$

avec comme condition:

$$i \;\neq j$$

Il faut additionner ou soustraire la distance ℓ selon que les fronts divergent l'un de l'autre ou convergent l'un vers l'autre.

À titre d'exemple, supposons les coefficients d'autocorrélation suivants entre les fronts qui présupposent leur proximité dans l'espace, ce qui se produit lorsqu'ils sont situés sur des bancs consécutifs dans la même région de la mine; en moyenne, huit blocs séparent les zones '1' et '2' et cinq blocs, les zones '2' et '3':

$$\varphi_{x_1\, x_2}(8,1) \;=\; 0{,}45(\%)^2 \qquad\qquad \varphi_{x_2\, x_3}(5,1) \;=\; 0{,}70(\%)^2$$

$$\varphi_{x_1 x_2}(9,1) = 0,30(\%)^2 \qquad \varphi_{x_2 x_3}(6,1) = 0,50(\%)^2$$

$$\varphi_{x_1 x_2}(10,1) = 0,20(\%)^2 \qquad \varphi_{x_2 x_3}(7,1) = 0,35(\%)^2$$

$$\varphi_{x_1 x_2}(11,1) = 0,10(\%)^2 \qquad \varphi_{x_2 x_3}(8,1) = 0,20(\%)^2$$

$$\varphi_{x_1 x_2}(12,1) = 0,00(\%)^2 \qquad \varphi_{x_2 x_3}(9,1) = 0,10(\%)^2$$

et aucune corrélation entre les fronts '1' et '3'.

En réutilisant les données des trois fronts déjà mentionnés plus haut, il est possible d'effectuer les calculs de variance et d'autocorrélation. Alors, la variance des lots se calcule comme suit pour des proportions de 40% de la zone '1' et 30% des zones '2' et '3' et en supposant les fronts '1' et '2' distants de 9 blocs unitaires en moyenne, les fronts '2' et '3' distants de 7 blocs unitaires, les fronts '2' et '3' convergeant l'un vers l'autre tandis que les fronts '1' et '2' se suivent:

$$\begin{aligned} S_R^2(1) &= 0,95\left[\left[0,40^2 \times 1,49(\%)^2 + 0,30^2\,[0,75(\%)^2 + 2,09(\%)^2]\right]\right. \\ &\qquad \left. + 2 \times [0,40 \times 0,30 \times 0,30(\%)^2 + 0,30 \times 0,30 \times 0,35(\%)^2]\right] \\ &\quad + 0,05\left[0,40\left(4,08(\%) - 3,35(\%)\right)^2 + 0.30\left(2,66(\%) - 3,35(\%)\right)^2\right. \\ &\qquad \left. + 0,30\left(3,06(\%) - 3,35(\%)\right)^2\right] \\ &= 0,63(\%)^2 \end{aligned}$$

De la même manière, l'application de la formule des coefficients d'autocorrélation permet d'obtenir une série de valeurs pour des lots de grosseur donnée:

$$\begin{aligned} \varphi_{RR}(1,1) &= \left[0,40^2 \times 1,524(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,466(\%)^2 + 0,30^2 \times 0,852(\%)^2\right] \\ &\qquad + 2 \times \left[0,40 \times 0,30 \times 0,20(\%)^2 + 0,30 \times 0,30 \times 0,50(\%)^2\right] \\ &= 0,54(\%)^2 \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

La variance et les coefficients d'autocorrélation de lots de grosseur 'n' peuvent aussi être dérivés de façon analogue aux paramètres des lots de grosseur unitaire ou encore à partir des formules dérivées plus haut pour les courants simples. La même procédure de calcul permet de reconstituer variance et autocorrélation dans le courant résultant pour diverses grosseurs de lots. La variance des lots de grosseur 'n' se calcule

à l'aide de la formule suivante:

$$S_R^2(n) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m} P_p^2\, S_{x_p}^2(1) + \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{m} P_p^2 \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\,\varphi_{x_p x_p}(\ell,1) + \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{m-1}\sum_{q=p+1}^{m} P_p P_q \Big[\sum_{\ell=1}^{n}(n-\ell+1)\,\varphi_{x_p x_q}(d_{pq}+\ell-1,1) + \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\,\varphi_{x_p x_q}(d_{pq}-\ell,1)\Big]$$

et les coefficients d'autocorrélation des lots de grosseur 'n' par la suivante:

$$\varphi_{xx}(\ell,n) = \frac{1}{n^2}\Bigg\{\sum_{p=1}^{m} P_{x_p}^2 \Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(i \times \varphi_{x_p x_p}(i+n(\ell-1),1)\Big) + \sum_{i=1}^{n-1}\Big((n-i)\varphi_{x_p x_p}(i+n\ell,1)\Big)\Big] + \sum_{p=1}^{m-1}\sum_{q=p+1}^{m} P_p P_q \Big[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)\Big(\varphi_{x_p x_q}(d_{p,q}+n\ell+i-1) + \varphi_{x_p x_q}(d_{p,q}-n\ell+i-1)\Big) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\Big(\varphi_{x_p x_q}(d_{p,q}+n\ell-i,1) + \varphi_{x_p x_q}(d_{p,q}-n\ell-i)\Big)\Big]\Bigg\}$$

Il est important de noter ici que ces équations ne sont valables que pour des valeurs de 'n' supérieures à l'unité. Le développement de ces équations est réalisé à l'appendice 'B'.

3.4 *Variance des teneurs avec superposition des variations quantitatives de production*

Il est bien évident qu'il existe, en plus des fluctuations de teneur dans un lot de grosseur 'n', des fluctuations de quantités au point de livraison. Ces fluctuations quantitatives ont pour conséquence d'accroître davantage les fluctuations de teneur au point de transfert du minerai. Il est cependant possible d'estimer l'impact de ces délais de production en provenance des diverses zones à l'aide d'équations relativement simples. Ce travail étant essentiellement consacré aux fluctuations de teneur dans le système de production, le développement et le fondement théorique de ces équations ne sera que brièvement esquissé en annexe, afin de donner un minimum de crédibilité aux formules ci-dessous.

Il faut commencer par définir un certain nombre de paramètres avant d'exposer la formule globale de variance. Ainsi, la teneur moyenne escomptée $\overline{X}(h)$ sur une période

de temps 'h' en provenance de 'K' fronts distincts est:

$$\overline{X}(h) = \frac{\sum_{i=1}^{K} Q_i(h) \times \overline{X}_i}{\sum_{i=1}^{K} Q_i(h)}$$

où $\overline{X}_i$ est la teneur moyenne au front 'i', en pourcentage, et $Q_i(h)$ est la quantité de production escomptée du front 'i', en tonnes. La variance de teneur $S^2(h)$ sur une période de temps 'h' dans le système de production sera donnée par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} S^2(h) = \sum_{i=1}^{N} \Bigg\{ & \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right]^2} \overline{X}_i^2 \times \overline{SQ}_i^2(h) + Q_i^2(h) \times SX_i^2(h) \\ & + \frac{SQ_i^2(h) \times \sum_{i=1}^{N} \left[Q_i(h) \times \overline{X}_i\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right]^2} \\ & - 2\left[\frac{\overline{X}_i \times SQ_i^2(h) \times \sum_{i=1}^{N} \left(Q_i(h) \times \overline{X}_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)}\right] \Bigg\} \end{aligned}$$

où $SX_i(h)$ représente les déviations de teneur de lots exploités sur la période de temps 'h' et $SQ_i(h)$ représente les déviations de quantités sur la période de temps 'h'. Cette expression est constituée par la somme de deux dérivées partielles de la teneur globale: par rapport à la teneur aux fronts et par rapport au tonnage des fronts. La démonstration de ces équations est effectuée à l'appendice 'C'.

CHAPITRE 4: ACCUMULATEUR INTERMÉDIAIRE DANS LE PROCESSUS DE TRANSFERT

Lorsqu'il existe un accumulateur intermédiaire dans le système de transfert du minerai de la mine au concentrateur, tel que silo, trémie de chargement, pile de mélange ou autre, il y a modification des propriétés intrinsèques du courant de minerai entre son arrivée et son départ. Il arrive qu'un mélange s'y produise, mais il peut être tout aussi fréquent d'y voir apparaître une ségrégation des produits qui s'y accumulent.

La modification des propriétés intrinsèques du courant provient du fait qu'un lot qui y est déversé se sépare en plusieurs fractions qui se retrouvent dans divers lots (de même dimension) à la sortie de l'accumulateur. C'est ce qui explique la ségrégation qualitative qui peut s'y produire si les fractions hétérogènes des divers lots d'entrée se retrouvent dispersés différemment dans les lots de sortie. Autrement dit, si le temps de séjour dans l'accumulateur n'est pas constant pour certaines fractions spécifiques des lots d'entrée, il y aura ségrégation des teneurs dans l'accumulateur. L'analyse qui suit se borne toutefois au cas où il y a stabilité dans le processus de transfert à l'intérieur de l'accumulateur. Autrement dit, le processus est considéré stationnaire.

Ainsi donc, un lot d'entrée dans un accumulateur s'y trouve fractionné et dispersé dans divers lots de sortie, tel qu'illustré à la figure 9. La variance $S_y^2(1)$ des lots élémentaires à la sortie est alors donnée par l'expression suivante:

$$S_y^2(1) = \sum_{i=1}^{p} k_i^2 \times S_x^2(1) + 2 \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=i+1}^{p} k_i \times k_j \times \varphi_{xx}(j-i,1)$$

où $\varphi_{xx}(j-i,1)$ représente l'autocorrélation dans les lots d'entrée et $S_x^2(1)$ la variance de ces lots; les k_i représentent les proportions du lot d'entrée qui se retrouvent dans le lot de sortie. La relation peut être illustrée à l'aide de la figure 10.

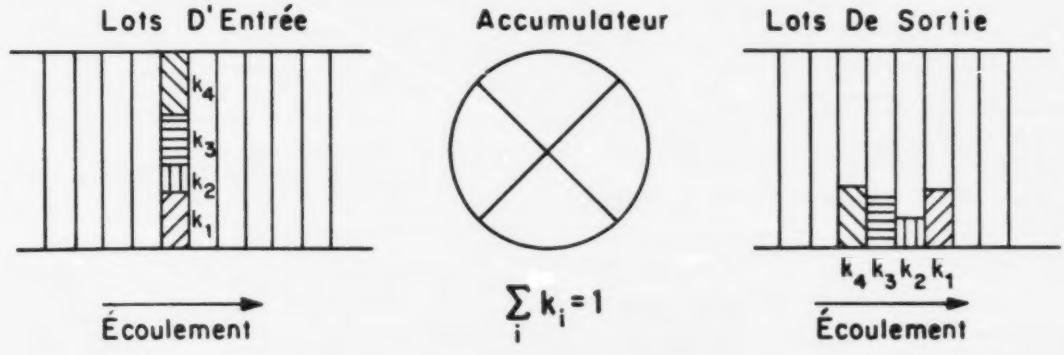

Figure 9: Fonction mélange d'un accumulateur

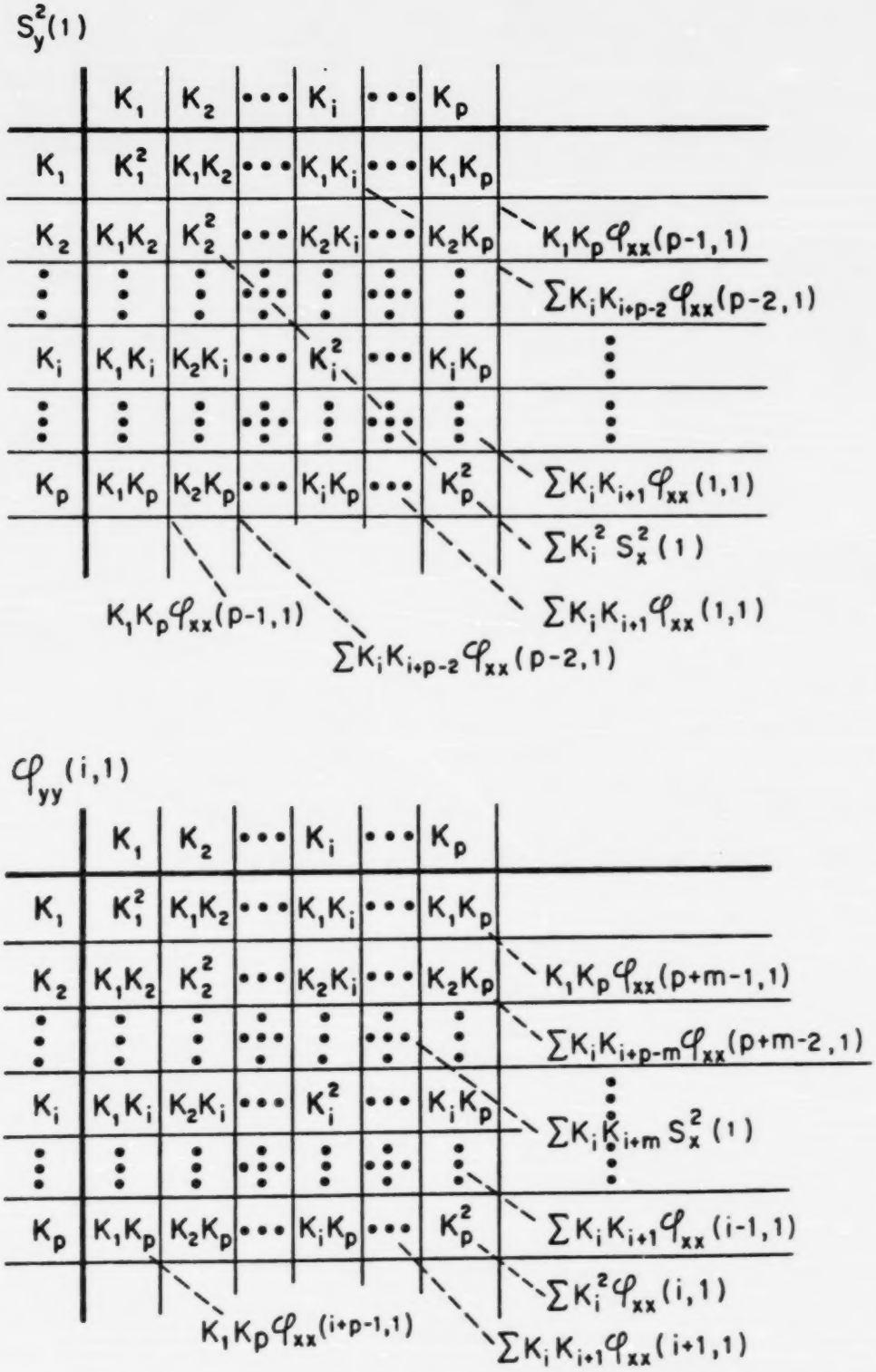

Figure 10 - Combinaison des proportions K_i et des corrélations d'entrée pour calculer l'autocorrélation à la sortie d'un accumulateur.

Quant aux coefficients d'autocorrélation $\varphi_{yy}(\ell,1)$ à la sortie, ils sont calculés de façon similaire:

$$\begin{aligned}
\varphi_{yy}(\ell,1) \;=\; & \sum_{j=1}^{p-\ell} k_j\, k_{j+\ell} \times S_x^2(1) \\
& + \left[\sum_{j=1}^{p-(\ell-1)} k_j\, k_{j+(\ell-1)} + \sum_{j=1}^{p-(\ell+1)} k_j\, k_{j+(\ell+1)}\right]\varphi_{xx}(1,1) \\
& + \left[\sum_{j=1}^{p-(\ell-2)} k_j\, k_{j+(\ell-2)} + \sum_{j=1}^{p-(\ell+2)} k_j\, k_{j+(\ell+2)}\right]\varphi_{xx}(2,1) + \ldots \\
& + \left[\sum_{j=1}^{p} k_j^2 + \sum_{j=1}^{p-2\ell} k_j\, k_{j+2\ell}\right]\varphi_{xx}(\ell,1) + \ldots \\
& + \left[\sum_{j=1}^{p-(n-\ell)} k_j\, k_{j+(n-\ell)} + \sum_{j=1}^{p-(\ell+n)} k_j\, k_{j+(\ell+n)}\right]\varphi_{xx}(n,1) + \ldots \\
& + \sum_{j=1}^{h} k_j\, k_{j+p-\ell}\,\varphi_{xx}(p,1) + \ldots \\
& + k_1\, k_p\,\varphi_{xx}(p+\ell-1)
\end{aligned}$$

où 'n' représente une distance entre lots supérieure à ℓ. Les tableaux qui suivent illustrent l'évolution des calculs à effectuer selon le coefficient d'autocorrélation recherché au sortir de l'accumulateur, lorsque les lots d'entrée se répartissent dans cinq lots à la sortie. L'élaboration de ces formules est effectuée à l'appendice 'D'.

exemple

Le cas analysé ci-dessous considère un fractionnement des lots d'entrée en cinq lots à la sortie dans les proportions suivantes:

$$k_1 \;=\; k_4 \;=\; k_5 \;=\; 0,1 \qquad k_2 \;=\; 0,3 \qquad k_3 \;=\; 0,4$$

Les valeurs d'autocorrélation du courant 'R' résultant de l'amalgamation des trois zones illustré à la figure 9 seront utilisées comme courant d'alimentation de l'accumulateur. La variance est donc:

$$\begin{aligned}
S_y^2 \;=\; & 0,49 \times (3 \times 0,1^2 \;+\; 0,3^2 \;+\; 0,4^2) \;+\; 2\,[0,36 \times (0,1 \times 0,3 \;+\; 0,3 \times 0,4 \\
& +\; 0,4 \times 0,1 \;+\; 0,1^2) \;+\; 0,30 \times (0,1 \times 0,4 \;+\; 0,3 \times 0,1 \;+\; 0,4 \times 0,1) \\
& +\; 0,26 \times (0.1^2 \;+\; 0,3 \times 0,1) \;+\; 0,22 \times 0,1^2] \\
=\; & 0,37(\%^2)
\end{aligned}$$

Les paramètres qui multiplient la variance et les coefficients d'autocorrélation demeurent regroupés de la même manière pour le calcul des autres variables à la sortie, selon l'illustration de la figure 11. Il est donc plus aisé maintenant de calculer les autres coefficients:

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}(1,1) &= 0,36 \times (0,28 + 0,11) + 0,49 \times 0,20 + 0,30 \times (0,20 + 0,04) \\ &\quad + 0,26 \times (0,11 + 0,01) + 0,22 \times 0,04 + 0,20 \times 0,01 \\ &= 0,35(\%^2)\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Le résultat apparaît sur la figure 12, qui reproduit pour comparaison les coefficients d'autocorrélation d'entrée. Il est facile de voir que l'avantage de l'accumulateur donné est limité aux deux premiers termes. Ceci s'explique par le fait que l'accumulateur choisi regroupe essentiellement deux fractions de lots d'entrée, qui sont les fractions deux et trois.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	
K_1	$0,1^2$	$0,1 \cdot 0,3$	$0,1 \cdot 0,4$	$0,1^2$	$0,1^2$	
K_2	$0,1 \cdot 0,3$	$0,3^2$	$0,3 \cdot 0,4$	$0,3 \cdot 0,1$	$0,3 \cdot 0,1$	0,01
K_3	$0,1 \cdot 0,4$	$0,3 \cdot 0,4$	$0,4^2$	$0,4 \cdot 0,1$	$0,4 \cdot 0,1$	0,04
K_4	$0,1^2$	$0,3 \cdot 0,1$	$0,1 \cdot 0,4$	$0,1^2$	$0,1^2$	0,11
K_5	$0,1^2$	$0,3 \cdot 0,1$	$0,1 \cdot 0,4$	$0,1^2$	$0,1^2$	0,20
		0,01	0,04	0,11	0,20	0,28

Figure 11 - Matrice des paramètres de pondération des coefficients d'autocorrélation d'entrée pour calculer la corrélation à la sortie.

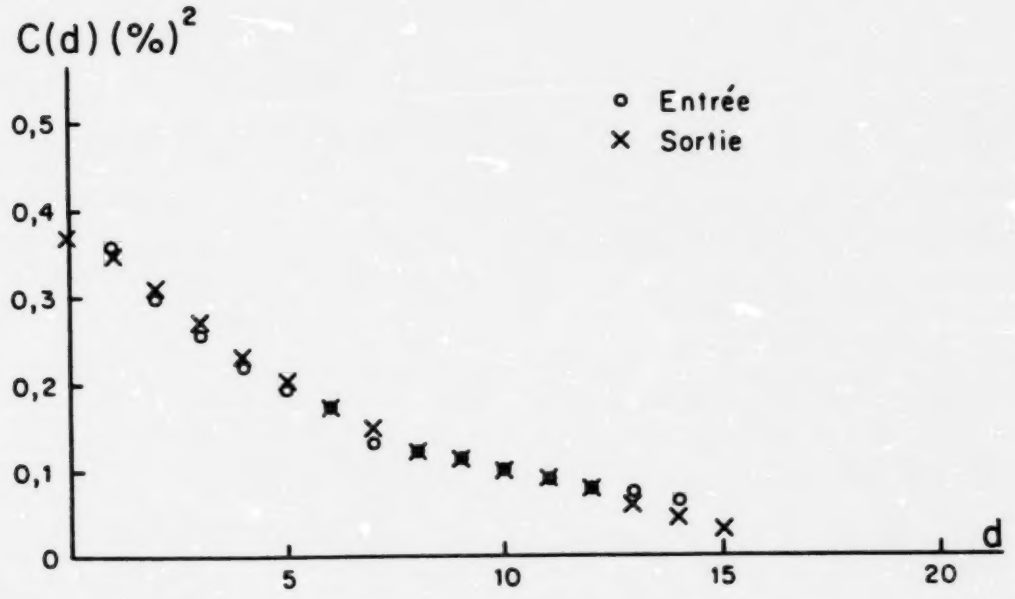

Figure 12 - Autocorrélation d'entrée et de sortie pour les paramètres de la figure 11.

DISCUSSION

Pour mieux comprendre l'effet statistique de la corrélation, il faut exprimer la variance pour diverses grosseurs de lots. Ceci a déjà été mentionné au cours de l'exposé qui précède. Cependant, il importe d'y revenir et de bien définir ce qu'elle peut représenter à l'échelle du gisement. Qu'en est-il, par exemple, de la variance à l'échelle du grain? Il est ici question de la dimension de libération moyenne où une proportion importante du matériel peut être séparé en minéral de valeur d'une part et en gangue d'autre part. Ces grains élémentaires occupent un volume V_u; ils sont soit du minerai avec teneur élevée $\overline{X}_m$, soit du stérile à teneur très faible $\overline{X}_s$ en métal de valeur.

Prenons le cas de minerai de fer hématitique Fe_2O_3 à teneur des grains de l'ordre de 68% en fer, accompagné de gangue de silice SiO_2 à teneur de salissage de l'ordre de 5% en fer. Connaissant la proportion P_m de grains de minéral utile dans le gisement, il est possible de définir moyenne, $\overline{X}_g$, et variance, S_g^2, à l'échelle des grains:

$$\overline{X}_g = P_m \times \overline{X}_m + P_s \times \overline{X}_s \qquad avec \quad P_s = 1 - P_m$$

et

$$S_g^2 = P_m (\overline{X}_m - \overline{X}_g)^2 + P_s (\overline{X}_s - \overline{X}_g)^2$$

Si les grains de minerai et de stérile étaient distribués de façon aléatoire dans le gisement, il serait possible de définir la variance en fonction de la grosseur du lot à l'aide de la loi binômiale. En amalgamant quelques centaines de grains, la variance devient alors à peu près négligeable. Cependant, la corrélation indique un groupement des grains de minerai dans certaines zones du gisement et des grains de stériles dans certaines autres zones. De ce fait, les échantillons prélevés ici et là dans le gisement ont des teneurs qui fluctuent. Le fait que ces fluctuations contiennent deux composantes, l'une aléatoire et l'autre systématique, permet d'observer une variance réelle dans le gisement supérieure à la variance théorique dérivée du modèle binômial qui présuppose une composante aléatoire uniquement. Ainsi, dans un gisement, la variabilité est supérieure aux variations escomptées selon les modèles statistiques qui négligent le groupement des grains de minerai ou de stérile.

À titre d'exemple, un diamètre moyen de 160 micromètres a été retenu comme dimension de libération, ce qui cède la grosseur moyenne des grains suivante:

$$V_u = \pi \times D^3/6 = \pi \times 160^3/6 \ \mu m^3 = 2,14 \times 10^{-12} m^3$$

En supposant 16Kg comme poids moyen d'échantillon et un facteur de conversion de 3,5 tonnes/m^3, un échantillon représentatif contient donc $4,57 \times 10^{-3} m^3$ ou $2,14 \times 10^9$

grains. Par un calcul identique, le gisement semble contenir $2,17 \times 10^{19}$ grains dont les deux tiers sont du minerai, soit $1,45 \times 10^{19}$ grains de minerai. ces valeurs ne sont que des approximations basées sur une dimension moyenne des grains; elles présupposent une dimension identique des grains de stérile et de minerai. En pratique, il peut arriver que ces valeurs soient faussées par les hypothèses précitées; il n'en demeure pas moins que l'ordre de grandeur sera certainement respecté. Après transformation des valeurs en logarithmes décimaux, il est possible de définir diverses grosseurs de lots le long de l'axe obtenu.

Par ailleurs, il est facile de calculer moyenne et variance des grains de fer et de silice en utilisant les valeurs de 68% et 5% en fer comme teneur des grains, tout en sachant que les deux tiers des grains sont du minéral Fe_2O_3:

$$\overline{X}_g = 0,667 \times 68\% + 0,333 \times 5\% = 47\% Fe$$

et

$$S_g^2 = 0,667 \times (68\% - 47\%)^2 + 0,333 \times (5\% - 47\%)^2 = 881,6(\%)^2 Fe$$

La variance des échantillons dans le gisement est habituellement connue, de même que celle d'échantillons représentatifs à divers points d'échantillonnage. Supposons une variance de $125(\%)^2$Fe en ce point. La variance de tout le gisement est nulle. Ceci permet de tracer une première courbe sur le graphique variance versus nombre de grains.

Tous les grains de minéral de valeur ne peuvent être séparés économiquement dans le gisement des grains du minéral sans valeur. Il y a donc perte d'une partie de ces grains aux haldes à stérile. De plus, un certain nombre de grains de stérile seront expédiés avec le minerai. En supposant une teneur moyenne du minerai de 56%Fe, il est possible de calculer la proportion des grains de minerai et de stérile contenue dans ces lots:

$56\% = P_m \times 68\% + (1 - P_m) \times 5\%$ d'où $P_m = 0,81$

Ceci permet de calculer la variance S_{gm}^2 des grains dans le minerai:

$$S_{gm}^2 = 0,81 \times (68\% - 56\%)^2 + 0,19 \times (5\% - 56\%)^2 = 610,8(\%)^2 Fe$$

La variance des échantillons de minerai peut être calculée directement à partir des résultats d'analyse, en supposant l'absence de biais dans les procédures de réduction et de prise d'essai. Supposons-la égale à $45(\%)^2$Fe. Comme pour le gisement entier, la variance de tout le minerai est nulle. Ceci permet d'obtenir une seconde courbe sur la figure 13.

En pratique cependant, les décisions de production et le mélange qui se produit dans le système de production modifient encore l'image de la variance selon la grosseur du lot. Ainsi, des échantillons représentant des lots de quelques centaines de tonnes, c'est-à-dire de l'ordre de 3×10^{13} grains, donne une valeur de $25(\%)^2$Fe.

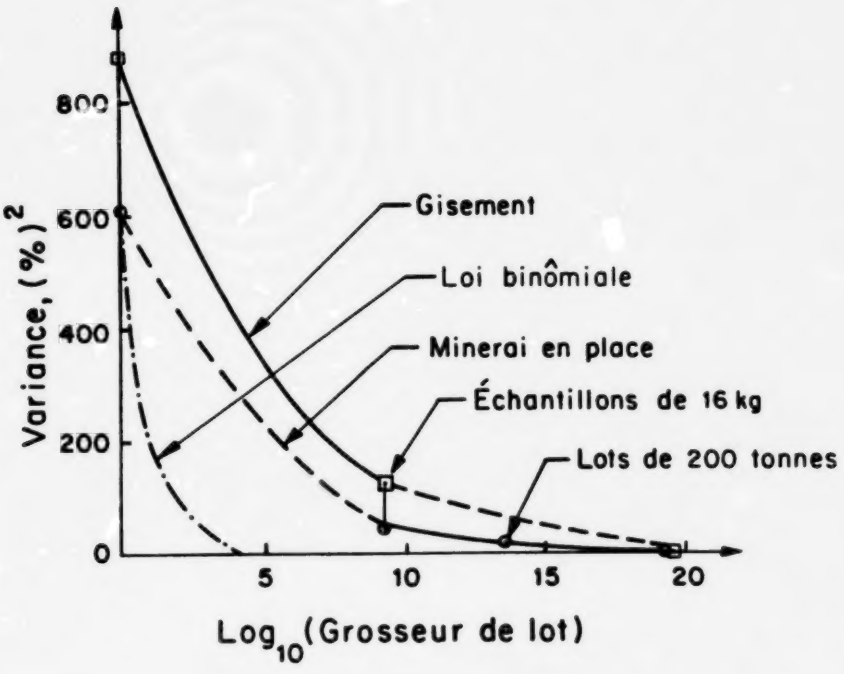

Figure 13 - Variance-grosseur de lot dans un gisement.

CONCLUSION

En considérant les systèmes de production et en connaissant les propriétés intrinsèques de lots de grosseur donnée, il est possible de prédire la transformation de ces paramètres dans le système de production. Le texte qui précède donne des outils mathématiques et statistiques pour ce faire.

Quelques problèmes doivent cependant être soulevés à ce moment: en premier lieu, il n'existe pas encore de théorie complète qui permette d'interpoler entre la variance à l'échelle du grain et la variance des échantillons de base. Ceci handicape grandement la théorie, étant donné que les échantillons prélevés dans une usine minéralurgique représentent très souvent des lots de grosseur inférieure à celle des lots reconnus dans le gisement. Il n'est pas encore possible de déterminer ces paramètres dans le gisement d'une façon adéquate.

Un second problème rencontré est celui de la sélectivité de l'équipement de transport par rapport aux dimensions des blocs élémentaires du gisement. Il n'existe pas encore de moyen approprié de définir la valeur de ce paramètre. Pour certains, ce problème est intimement lié au précédent, puisqu'une reconnaissance des paramètres au niveau des dimensions inférieures à celles du bloc élémentaire permettrait de négliger l'un des deux termes de l'équation du chapitre 3.

Un troisième problème surgit lorsqu'on examine l'hypothèse de stabilité des coefficients de transfert dans les accumulateurs. Ceux-ci sont très rarement respectés, sauf lorsqu'il y a écoulement de masse. Même dans ce cas, le niveau moyen de minerai dans l'accumulateur modifie les coefficients de transfert, de sorte qu'il faut de très nombreuses observations afin de déterminer ceux qu'il faut utiliser à un moment donné.

En dépit des restrictions énoncées ci-dessus, il n'en demeure pas moins que la théorie générale sur le mélange des minerais en cours d'écoulement présentée ici mérite d'être intégrée dans un système de production. Avec le nombre de fronts de production qui diminue à cause de la dimension plus grande de l'équipement de manutention, il importe de considérer les problèmes que l'instabilité des teneurs de l'alimentation cause à l'usine minéralurgique. Malgré ses déficiences, la théorie présentée dans les pages qui précèdent n'en comble pas moins un besoin du planificateur minier.

BIBLIOGRAPHIE

Billette, N., 1974. "Variances de production des teneurs du minerai dans un système de transfert". Mémoire de maîtrise es sciences appliquées, Département de Génie minéral, École Polytechnique, Montréal, 101p.

Billette, N., 1978. "Modèle analytique de corrélation dans le matériel exploité d'un circuit de production minier". Thèse de doctorat es sciences appliquées, Département de Génie minéral, École Polytechnique, Montréal, 266p.

Billette, N. & Elbrönd, J., 1984a. "Correlation and Blending in a Mining Productive System". Proceedings of 18th International Symposium on Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industries, IMM publ., March, pp. 39-49.

Billette N. &Elbrönd, J., 1984b. "Corrélation et mélange dans un système de production minière". Bulletin de l'ICM, Vol. 77, No. 866, juin, pp. 111-117.

Daud, B., 1974. "Computerized Geostatistical Estimation of Block Grades". Proceedings, XIIth APCOM Symposium, Denver, Co., pp. F1-F29.

David, M., 1977. "Geostatistical Ore Reserve Estimation". Elsevier, Amsterdam, 364p.

Elbrönd, J., 1982. "Homogeneisation and Blending of Coal: Definitions and Formulas". Proceedings, First Australian International Bulk Materials Conference, IES Publ., Sydney, pp.177-189.

Gerstel, A.W., 1977. "Bed Blending Theory". Stacking, Blending, Reclaiming, chapitre 24, Trans Tech Publications, Vol. 1, No 5, R.H. Wöhler ed.

Gy, P., 1979. "Sampling of Particulate Materials, Theory and Practice". Elsevier, Amsterdam, 431p.

Inoue, T. & Imaizumi, T., 1972. "Homogenization of Mill Feed By Partial Recycling of Bin Discharge". Volume spécial No. 12 de l'ICM, pp. 421-427.

Samland P.K. & Ingamells C.O., 1974. "New Approaches To Geostatistical Evaluation". Proceedings, XIIth APCOM Symposium, pp. F108-F130.

Schurtz, R.F., 1959. "The Electronic Computer and Statistics For Predicting Ore Recovery. Min. Eng., pp. 1035-1044.

APPENDICE A

PARAMÈTRES STATISTIQUES DES LOTS DE DIMENSION UNITAIRE
D'UN COURANT DE MINERAI COMPOSÉ À PARTIR DE 'm' SOURCES

PARAMÈTRES STATISTIQUES DES LOTS DE DIMENSION UNITAIRE D'UN COURANT DE MINERAI COMPOSÉ À PARTIR DE 'm' SOURCES

Les paramètres statistiques dont il s'agit ici sont la variance et les coefficients d'autocorrélation des teneurs ou de toute autre variable physique quantifiée lors de l'étude du gîte.

Soit un courant de minerai 'R' obtenu par le mélange de 'm' courants alimentateurs x_i, i = 1,2,...,m; soient $S^2_{x_i}(1)$ et $\varphi_{x_i x_i}(\ell, 1)$, la variance et les coefficients d'autocorrélation des lots de dimension unitaire dans chaque courant individuel x_i; et soient $S^2_R(1)$ et $\varphi_{RR}(\ell, 1)$, la variance et l'autocovariance des teneurs de lots unitaires dans le courant résultant 'R'. Alors:

$$\begin{aligned} S^2_R(1) &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(R_j - \overline{R})^2 \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta^2 R_j \end{aligned}$$

Mais

$$\Delta R_j = \sum_{i=1}^{m} P_i\,\Delta X_{ij}$$

où P_i représente la contribution relative du courant initial 'i' au courant résultant, avec:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$$

Lorsque m=3, alors:

$$\begin{aligned} \Delta^2 R_i &= (P_1\,\Delta X_{1j} + P_2\,\Delta X_{2j} + P_3\,\Delta X_{3j})^2 \\ &= P_1^2\,\Delta^2 X_{1j} + P_2^2\,\Delta^2 X_{2j} + P_3^2\,\Delta^2 X_{3j} \\ &\quad + 2(P_1 P_2\,\Delta X_{1j}\,\Delta X_{2j} + P_1 P_3\,\Delta X_{1j}\,\Delta X_{3j} + P_2 P_3\,\Delta X_{2j}\,\Delta X_{3j}) \end{aligned}$$

et, par conséquent:

$$\begin{aligned} S^2_R(1) &= P_1^2 \times \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta^2 X_{1j} + P_2^2 \times \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta X_{2j} + P_3^2 \times \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta^2 X_{3j} \\ &\quad + 2\Big(P_1 P_2 \times \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta X_{1j}\,\Delta X_{2j} + P_1 P_3 \times \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta X_{1j}\,\Delta X_{3j} \\ &\quad + P_2 P_3 \times \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta X_{2j}\,\Delta X_{3j}\Big) \\ &= P_1^2\,S^2_{x_1}(1) + P_2^2\,S^2_{x_2}(1) + P_3^2\,S^2_{x_3}(1) \\ &\quad + 2\Big(P_1 P_2\,\varphi_{x_1 x_2}(d_{12}, 1) + P_1 P_3\,\varphi_{x_1 x_3}(d_{13}, 1) + P_2 P_3\,\varphi_{x_2 x_3}(d_{23}, 1)\Big) \end{aligned}$$

avec d_{in}, la distance moyenne entre les fronts 'i' et 'n'. L'expresion générale de la variance peut donc être obtenue suivant la formule:

$$S_R^2(1) = \sum_{i=1}^{m} P_i^2 S_{x_i}^2(1) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n=i+1}^{m} P_i P_n \varphi_{x_i x_n}(d_{in}, 1)$$

Lorsque les courants d'appoint au courant résultant sont indépendants entre eux, alors leurs covariances sont nulles et la seconde partie de l'équation devient nulle. Comme il s'agit de la situation la plus courante, il importe de noter cette expression simplifiée ci-dessous:

$$S_R^2(1) = \sum_{i=1}^{m} P_i^2 S_{x_i}^2(1)$$

De même, il est possible de démontrer les relations en ce qui concerne les coefficients d'autocorrélation. Tout d'abord, il est nécessaire de poser que:

$$\varphi_{RR}(\ell, 1) = \frac{1}{k-\ell} \sum_{j=1}^{k-\ell} \Delta R_j \Delta R_{j+\ell}$$

Mais

$$\Delta R_j = \sum_{i=1}^{m} P_i \Delta X_{ij}$$

où P_i représente la contribution relative du courant initial 'i' au courant résultant, avec:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$$

Par conséquent, en développant l'équation pour m=3, il en résulte:

$$\begin{aligned}
\Delta R_j \Delta R_{j+\ell} &= (P_1 \Delta X_{1j} + P_2 \Delta X_{2j} + P_3 \Delta X_{3j}) \times \\
&\quad (P_1 \Delta X_{(1+\ell)j} + P_2 \Delta X_{(2+\ell)j} + P_3 \Delta X_{(3+\ell)j}) \\
&= P_1^2 \Delta X_{1j} \Delta X_{(1+\ell)j} + P_2^2 \Delta X_{2j} \Delta X_{(2+\ell)j} + P_3^2 \Delta X_{3j} \Delta X_{(3+\ell)j} \\
&\quad + P_1 P_2 \Delta X_{1j} \Delta X_{(2+\ell)j} + P_1 P_3 \Delta X_{1j} \Delta X_{(3+\ell)j} \\
&\quad + P_1 P_2 \Delta X_{2j} \Delta X_{(1+\ell)j} + P_2 P_3 \Delta X_{2j} \Delta X_{(3+\ell)j} \\
&\quad + P_1 P_3 \Delta X_{3j} \Delta X_{(1+\ell)j} + P_2 P_3 \Delta X_{3j} \Delta X_{(2+\ell)j}
\end{aligned}$$

L'expresion des coefficients d'autocorrélation s'obtient alors comme suit:

$$\begin{aligned}
\varphi_{RR}(\ell,1) &= P_1^2 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{1j}\, \Delta X_{(1+\ell)j} + P_2^2 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{2j}\, \Delta X_{(2+\ell)j} \\
&\quad + P_3^2 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{3j}\, \Delta X_{(3+\ell)j} \\
&\quad + P_1 P_2 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{1j}\, \Delta X_{(2+\ell)j} + P_1 P_3 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{1j}\, \Delta X_{(3+\ell)j} \\
&\quad + P_1 P_2 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{2j}\, \Delta X_{(1+\ell)j} + P_1 P_3 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{3j}\, \Delta X_{(1+\ell)j} \\
&\quad + P_2 P_3 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{2j}\, \Delta X_{(3+\ell)j} + P_2 P_3 \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Delta X_{3j}\, \Delta X_{(2+\ell)j} \\
&= P_1^2\, \varphi_{x_1x_1}(\ell,1) + P_2^2\, \varphi_{x_2x_2}(\ell,1) + P_3^2\, \varphi_{x_3x_3}(\ell,1) \\
&\quad + 2\Big(P_1 P_2\, \varphi_{x_1x_2}(d_{12} \pm \ell,1) + P_1 P_3\, \varphi_{x_1x_3}(d_{13} \pm \ell,1) \\
&\qquad + P_2 P_3\, \varphi_{x_2x_3}(d_{23} \pm \ell,1)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} P_i^2\, \varphi_{x_ix_i}(\ell,1) + 2\Big(\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{n=i+1}^{m} P_i P_n\, \varphi_{x_ix_n}(d_{in} \pm \ell,1)\Big)
\end{aligned}$$

où d_{in} représente la distance moyenne entre les fronts 'i' et 'n'. Il est important de noter que la distance sera réduite lorsque les fronts convergent et accrue lorsqu'ils divergent. De plus, il y aurait lieu de considérer la distance résultante comme étant la troisième droite du triangle formé par l'addition géométrique des distances d_{in} et ℓ. Toutefois, comme il s'agit habituellement de distances mesurées en nombre de blocs et, par suite, discrètes, il n'y a pas lieu de se formaliser de l'addition ou soustraction linéaire des deux distances en cause. Dans le cas le plus commun, les distances d_{in} sont supérieures aux distances maximales de corrélation, de sorte que l'expression se simplifie alors comme suit:

$$\begin{aligned}
\varphi_{RR}(\ell,1) &= P_1^2\, \varphi_{x_1x_1}(\ell,1) + P_2^2\, \varphi_{x_2x_2}(\ell,1) + P_3^2\, \varphi_{x_3x_3}(\ell,1) + \ldots \\
&= \sum_{i=1}^{m} P_i^2\, \varphi_{x_ix_i}(\ell,1)
\end{aligned}$$

APPENDICE B

PARAMÈTRES STATISTIQUES DES LOTS DE GROSSEUR 'n' D'UN COURANT DE MINERAI

PARAMÈTRES STATISTIQUES DES LOTS DE GROSSEUR 'n' D'UN COURANT DE MINERAI

A) COURANT SIMPLE DE MINERAI

Les paramètres statistiques dont il s'agit ici sont la variance et les coefficients d'autocorrélation des teneurs ou de toute autre variable physique quantifiée lors de l'étude du gîte.

Pour des lots de dimension unitaire, la variance $S_x^2(1)$ est obtenue en calculant:

$$S_x^2(1) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(X_j - \overline{X})^2$$

et les coefficients d'autocorrélation $\varphi_{xx}(\ell, 1)$ se calculent à l'aide de l'équation suivante:

$$\varphi_{xx}(\ell,1) = \frac{1}{k-\ell}\sum_{j=1}^{k-\ell}(X_j - \overline{X})(X_{j+1} - \overline{X})$$

où X_j et $\overline{X}$ représentent la teneur moyenne du lot 'j' et la teneur moyenne du courant de minerai respectivement.

En écrivant que $\Delta X_j = X_j - \overline{X}$ et que $\Delta^2 X_j = (X_j - \overline{X})^2$, la variance $S_x^2(1)$ peut être exprimée comme suit:

$$S_x^2(1) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\Delta^2 X_j$$

En supposant Y_i, la teneur moyenne d'un lot constitué de 'n' lots de dimension unitaire, il est possible d'écrire:

$$\Delta Y_i = \sum_{j=1}^{k}\frac{\Delta X_j}{n}$$

d'où la variance $S_y^2(n)$ qui se calcule comme suit:

$$\begin{aligned} S_y^2(n) &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Delta^2 Y_i \\ &= \frac{1}{k\times n^2}\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{k}\Delta X_j\Big)_i^2 \end{aligned}$$

Lorsque n=2, le développement cède:

$$\begin{aligned} S_y^2(2) &= \frac{1}{4k}\sum_{i=1}^{k}(\Delta X_i + \Delta X_{i+1})^2 \\ &= \frac{1}{4k}\sum_{i=1}^{k}(\Delta^2 X_i + \Delta^2 X_{i+1} + 2\times\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}) \\ &= \frac{1}{4}\Big(2\,S_x^2(1) + 2\,\varphi_{xx}(1,1)\Big) \end{aligned}$$

Lorsque n=3, le développement cède:

$$\begin{aligned} S_y^2(3) &= \frac{1}{9k}\sum_{i=1}^{k}(\Delta X_i + \Delta X_{i+1} + \Delta X_{i+2})^2 \\ &= \frac{1}{9k}\sum_{i=1}^{k}\Big(\Delta^2 X_i + \Delta^2 X_{i+1} + \Delta^2 X_{i+2} \\ &\qquad + 2(\Delta X_i\,\Delta X_{i+1} + \Delta X_i\,\Delta X_{i+2} + \Delta X_{i+1}\,\Delta X_{i+2})\Big) \\ &= \frac{1}{9}\Big(3\,S_x^2(1) + 4\,\varphi_{xx}(1,1) + 2\,\varphi_{xx}(2,1)\Big) \end{aligned}$$

Par conséquent, la formule générale suivante en découle:

$$S_y^2(n) = \frac{1}{n}S_x^2(1) + \frac{2}{n^2}\sum_{\ell=1}^{k-1}(n-\ell)\,\varphi_{xx}(\ell,1)$$

Il est possible d'utiliser la même logique pour dériver les coefficients d'autocorrélation pour des lots de dimension 'n' espacés d'une distance 'ℓ'. Au départ, la formulation suivante est fondamentale:

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}(\ell,n) &= \frac{1}{k-\ell}\sum_{i=1}^{k-\ell}\Delta Y_i\,\Delta Y_{i+n\ell} \\ &= \frac{1}{n^2\times(k-\ell)}\sum_{i=1}^{k-\ell}\Big(\sum_{j=1}^{n}\Delta X_j\Big)\times\Big(\sum_{j=1}^{n}\Delta X_{j+n\ell}\Big) \end{aligned}$$

Lorsque n=2, le développement cède:

$$\begin{aligned}
\varphi_{yy}(\ell,2) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-\ell}\sum_{i=1}^{k-\ell}\left((\Delta X_i + \Delta X_{i+1}) \times (\Delta X_{i+2\ell} + \Delta X_{i+2\ell+1})\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-\ell}\sum_{i=1}^{k-\ell}\left(\Delta X_i \Delta X_{i+2\ell} + \Delta X_i \Delta X_{i+2\ell+1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \Delta X_{i+1} \Delta X_{i+2\ell} + \Delta X_{i+1} \Delta X_{i+2\ell+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\varphi_{xx}(2\ell,1) + \varphi_{xx}(2\ell+1,1) + \varphi_{xx}(2\ell-1,1)\right)
\end{aligned}$$

Lorsque n=3, le développement cède:

$$\begin{aligned}
\varphi_{yy}(\ell,3) &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{k-\ell}\sum_{i=1}^{k-\ell}\left((\Delta X_i + \Delta X_{i+1} + \Delta X_{i+2}) \times \right.\right. \\
&\quad \left.\left. (\Delta X_{i+3\ell} + \Delta X_{i+3\ell+1} + \Delta X_{i+3\ell+2})\right)\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{k-\ell}\sum_{i=1}^{k-\ell}\left(\Delta X_i \Delta X_{i+3\ell} + \Delta X_i \Delta X_{i+3\ell+1} + \Delta X_i \Delta X_{i+3\ell+2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \Delta X_{i+1} \Delta X_{i+3\ell} + \Delta X_{i+1} \Delta X_{i+3\ell+1} + \Delta X_{i+1} \Delta X_{i+3\ell+2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(3\varphi_{xx}(3\ell,1) + 2\varphi_{xx}(3\ell+1,1) + \varphi_{xx}(3\ell+2,1)\right. \\
&\quad \left. + 2\varphi_{xx}(3\ell-1,1) + \varphi_{xx}(3\ell-2,1)\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la formule générale suivante en découle, pour 'n' quelconque:

$$\varphi_{yy}(\ell,n) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(i \times \varphi_{xx}(i+n(\ell-1),1)\right) + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) \times \varphi_{xx}(i+n\ell,1)\right]$$

Cette formule peut également être modifiée comme suit, en intégrant 'n' dans la seconde partie de l'expression de droite:

$$\varphi_{yy}(\ell,n) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(i \times \varphi_{xx}(i+n(\ell-1),1)\right) + \sum_{i=n+1}^{2n-1}(2n-i) \times \varphi_{xx}(i+n(\ell-1),1)\right]$$

B) COURANT DE MINERAI PROVENANT DE SOURCES DIVERSES

Soit la proportion P_p, p=1,2,...,m, de minerai provenant de la zone 'p'. Alors, en supposant Y_i, la teneur moyenne d'un lot constitué de 'n' lots unitaires dans les proportions P_p de diverses provenances, il est possible d'écrire:

$$\Delta Y_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{m} \Delta X_{pj}$$

La variance $S_y^2(n)$ est obtenue en calculant:

$$\begin{aligned} S_y^2(n) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \Delta^2 Y_i \\ &= \frac{1}{k \times n^2} \sum_{i=1}^{k} \Big[\sum_{j=1}^{k} \sum_{p=1}^{m} P_p \, \Delta X_{pj} \Big]_i^2 \end{aligned}$$

Lorsque p=n=2, le développement donne:

$$\begin{aligned} S_y^2(2) &= \frac{1}{4k} \sum_{i=1}^{k} \Big(P_1 \, \Delta X_{1,i} + P_2 \, \Delta X_{2,i} + P_1 \, \Delta X_{1,i+1} + P_2 \, \Delta X_{2,i+1} \Big)^2 \\ &= \frac{1}{4k} \sum_{i=1}^{k} \Big(P_1^2 \, \Delta^2 X_{1,i} + P_1^2 \, \Delta^2 X_{1,i+1} + 2 \times P_1^2 \, \Delta X_{1,i} \, \Delta X_{1,i+1} \\ &\quad + P_2^2 \, \Delta^2 X_{2,i} + P_2^2 \, \Delta^2 X_{2,i+1} + 2 \times P_2^2 \, \Delta X_{2,i} \, \Delta X_{2,i+1} \\ &\quad + 2 \times P_1 \, P_2 \, \Delta X_{1,i} \, \Delta X_{2,i} + 2 \times P_1 \, P_2 \, \Delta X_{1,i} \, \Delta X_{2,i+1} \\ &\quad + 2 \times P_1 \, P_2 \, \Delta X_{1,i+1} \, \Delta X_{2,i} + 2 \times P_1 \, P_2 \, \Delta X_{1,i+1} \, \Delta X_{2,i+1} \Big) \\ &= \frac{1}{4} \Big[2 \sum_{p=1}^{2} P_p^2 \, S_{x_p}^2(1) + 2 \times \sum_{p=1}^{2} P_p^2 \, \varphi_{x_p x_p}(1,1) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{2-1} \sum_{\ell=p+1}^{2} P_p \, P_\ell \Big(4 \times \varphi_{x_p x_\ell}(d_{p\ell}, 1) + 2 \times \varphi_{x_p x_\ell}(d_{p\ell}+1, 1) \\ &\quad + 2 \times \varphi_{x_p x_\ell}(d_{p\ell}-1, 1) \Big) \Big] \end{aligned}$$

où $d_{p\ell}$ représente la distance moyenne entre les fronts p et ℓ. Selon que les fronts convergent l'un vers l'autre où se déplacent de façon plus ou moins parallèle, l'expresion est modifiée, puisque les signes '+' et '-' doivent être inversés. Tel qu'expliqué à l'appendice 'A', il s'agirait en théorie d'une distance géométrique qui n'est pas nécessairement identique à la somme ou à la différence entre les deux valeurs.

De façon générale et en extrapolant les résultats obtenus ci-dessus, la variance sera donc donnée, lorsque les fronts sont travaillés en parallèle ou divergent, par l'équation:

$$
\begin{aligned}
S_y^2(n) \;=\; & \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{m} P_p^2\, S_{x_p}^2(1) + \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{m} P_p^2 \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\,\varphi_{x_p x_p}(\ell,1) \\
& + \frac{2}{n^2}\sum_{p=1}^{m-1}\sum_{j=p+1}^{m} P_p P_j \Big[\sum_{\ell=1}^{n}(n-\ell+1)\,\varphi_{x_p x_j}(d_{pj}+\ell-1,1) \\
& \qquad + \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\,\varphi_{x_p x_j}(d_{pj}-\ell,1)\Big]
\end{aligned}
$$

Dans le cas où les fronts convergent, la dernière partie de l'équation doit être revue, afin d'inverser les signes des distances des coefficients d'autocorrélation inter-fronts.

Dans le cas des coefficients d'autocorrélation des lots de dimension supérieure à l'unité lors de jonction de courants différents, ils sont dérivés de façon similaire à la variance:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{yy}(\ell,n) \;&=\; \frac{1}{k-\ell}\sum_{i=1}^{k-\ell}\Delta Y_i\,\Delta Y_{i+n\ell} \\
&=\; \frac{1}{n^2(k-\ell)}\sum_{i=1}^{k-\ell}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} P_p\,\Delta X_{p,j}\Big)_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} P_p\,\Delta X_{p,j+n\ell}\Big)_i\Big]
\end{aligned}
$$

Lorsque p=n=2, le développement donne, pour des fronts travaillés en parallèle:

$$\begin{aligned}
\varphi_{yy}(\ell,2) &= \frac{1}{4(k-\ell)}\sum_{i=1}^{k-\ell}\Big[(P_1\,\Delta X_{1,i} + P_1\,\Delta X_{1,i+1} + P_2\,\Delta X_{2,j} + P_2\,\Delta X_{2,i+1}) \\
&\qquad (P_1\,\Delta X_{1,i+2\ell} + P_1\,\Delta X_{1,i+2\ell+1} + P_2\,\Delta X_{2,i+2\ell} + P_2\,\Delta X_{2,i+2\ell+1})\Big] \\
&= \frac{1}{4(k-\ell)}\sum_{i=1}^{k-\ell}\Big[P_1^2\,(\Delta X_{1,i}\,\Delta X_{1,i+2\ell} + \Delta X_{1,i}\,\Delta X_{1,i+2\ell+1} + \Delta X_{1,i+1}\,\Delta X_{1,i+2\ell} \\
&\qquad + \Delta X_{1,i+1}\,\Delta X_{1,i+2\ell+1}) \\
&\quad + P_2^2\,(\Delta X_{2,i}\,\Delta X_{1,i+2\ell} + \Delta X_{2,i}\,\Delta X_{2,i+2\ell+1} + \Delta X_{2,i+1}\,\Delta X_{2,i+2\ell} \\
&\qquad + \Delta X_{2,i+1}\,\Delta X_{2,i+2\ell+1}) \\
&\quad + P_1\,P_2\,(\Delta X_{1,i}\,\Delta X_{2,i+2\ell} + \Delta X_{1,i}\,\Delta X_{2,i+2\ell+1} + \Delta X_{1,i+1}\,\Delta X_{2,i+2\ell} \\
&\qquad + \Delta X_{1,i+1}\,\Delta X_{2,i+2\ell+1} + \Delta X_{2,i}\,\Delta X_{1,i+2\ell} + \Delta X_{2,i}\,\Delta X_{1,i+2\ell+1} \\
&\qquad + \Delta X_{2,i+1}\,\Delta X_{1,i+2\ell} + \Delta X_{2,i+1}\,\Delta X_{1,i+2\ell+1})\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[P_1^2\Big(2\times\varphi_{x_1x_1}(2\ell,1) + \varphi_{x_1x_1}(2\ell+1,1) + \varphi_{x_1x_1}(2\ell-1)\Big) \\
&\quad + P_2^2\Big(2\times\varphi_{x_2x_2}(2\ell,1) + \varphi_{x_2x_2}(2\ell+1,1) + \varphi_{x_2x_2}(2\ell-1,1)\Big) \\
&\quad + P_1P_2\Big(2\times\varphi_{x_1x_2}(d_{12}+2\ell,1) + \varphi_{x_1x_2}(d_{12}+2\ell+1,1) \\
&\qquad + \varphi_{x_1x_2}(d_{12}+2\ell-1,1) + 2\times\varphi_{x_1x_2}(d_{12}-2\ell,1) \\
&\qquad + \varphi_{x_1x_2}(d_{12}-2\ell+1,1) + \varphi_{x_1x_2}(d_{12}-2\ell-1,1)\Big)\Big]
\end{aligned}$$

Il faut souligner ici que les distances 2ℓ sont parfois considérables et qu'il peut devenir essentiel dans ce cas de considérer les vraies distances géométriques entre les nouveaux points. De façon générale, l'équation s'écrit:

$$\begin{aligned}
\varphi_{yy}(\ell,n) &= \frac{1}{n^2}\Big\{\sum_{p=1}^{m}P_p^2\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(i\times\varphi_{x_px_p}(i+n(\ell-1),1)\Big) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\times\varphi_{x_px_p}(i+n\ell,1)\Big] \\
&\qquad + \sum_{p=1}^{m-1}\sum_{j=p+1}^{m}P_pP_j\Big[\sum_{i=1}^{n}\Big(n-i+1\Big)\times\Big[\varphi_{x_px_j}(d_{p,j}+n\ell+i-1) \\
&\qquad\qquad + \varphi_{x_px_j}(d_{p,j}-n\ell+i-1)\Big] \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n-1}\Big(n-i\Big)\times\Big[\varphi_{x_px_j}(d_{p,j}+n\ell-i) + \varphi_{x_px_j}(d_{p,j}-n\ell-i)\Big]\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

APPENDICE C

VARIATIONS DE TENEURS DANS UN SYSTÈME DE PRODUCTION
AVEC VARIATIONS QUANTITATIVES SURIMPOSÉES

VARIATIONS DE TENEURS DANS UN SYSTÈME DE PRODUCTION AVEC VARIATIONS QUANTITATIVES SURIMPOSÉES

Le lecteur sera sans doute intéressé au départ à connaître les fluctuations de quantités dans le système. Les équations ci-dessous ne sont pas démontrables mathématiquement, car elles débouchent sur des progressions infinies. En pratique, il en va autrement puisque l'équipement subit des remises à neuf périodiques qui ramènent les valeurs asymptotiques vers des limites finies. Soient:

I_i : intensité de production de la machine 'i';

$\overline{P}_i$: durée moyenne de production de la machine 'i', en heures;

$\overline{A}_i$: durée moyenne des interruptions de la machine 'i', en heures;

η_i : disponibilité interne de la machine 'i';

η_i : $\overline{P}_i/(\overline{P}_i + \overline{A}_i)$;

$Q_i(h)$: production moyenne de la machine 'i' pendant 'h' heures;

$Q_i(h) = I_i \times \eta_i \times h$

$SQ_i(h)$: écart type de production de la machine 'i' pendant 'h' heures;

$$SQ_i(h) = \begin{cases} I_i \times h \times \sqrt{\eta_i \times (1-\eta_i)} & \text{if } h \leq \overline{A}_i \\ I_i \times \sqrt{\overline{A}_i} \times \sqrt{h} \times \sqrt{\eta_i \times (1-\eta_i)} & \text{if } \overline{A}_i \leq h \leq (\overline{P}_i + \overline{A}_i) \\ I_i \times \sqrt{\overline{A}_i} \times \sqrt{\overline{P}_i + \overline{A}_i} \times \sqrt{\eta_i \times (1-\eta_i)} & \text{if } h \geq (\overline{P}_i + \overline{A}_i) \end{cases}$$

Par ailleurs, il existe habituellement plusieurs fronts en production simultanée, de sorte que l'écart type $\overline{SQ}_t(h)$ de la production globale de 'N' machines dans le système est donnée par:

$$\overline{SQ}_t(h) = \left[\sum_{i=1}^{N} \left(SQ_i(h)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

En établissant que:

$\overline{X}_i$: teneur moyenne au front 'i', en %;

$\overline{X}_t(h)$: teneur cible de production globale, en %;

$SX_i(h)$: écart type de teneur relié à la quantité $Q_i(h)$, en %;

$SX_t(h)$: écart type de teneur relié à la quantité $\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)$, en %;

alors la teneur moyenne $\overline{X}_t(h)$ de la production est donnée par:

$$\overline{X}_t(h) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Q_i(h) \times \overline{X}_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)}$$

et la variance de production $S^2(h)$ est dérivée comme suit:

$$
\begin{aligned}
S^2(h) &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left[\frac{\delta \overline{X}_t(h)}{\delta Q_i(h)}\right]^2 \times SQ_i^2(h) + \left[\frac{\delta \overline{X}_t(h)}{\delta \overline{X}_i}\right]^2 \times SX_i^2(h) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left[\frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right) \times \overline{X}_i\right] - \sum_{i=1}^{N} \left(Q_i(h) \times \overline{X}_i\right)}{\left[\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right]^2} \right]^2 SQ_i^2(h) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right) \times Q_i(h)}{\left[\sum_{i=1}^{n} Q_i(h)\right]^2} \right]^2 SX_i^2(h) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right]^2} \overline{X}_i^2 \times \overline{SQ}_i^2(h) + Q_i^2(h) \times SX_i^2(h) \right. \\
&\quad + \frac{SQ_i^2(h) \times \sum_{i=1}^{N} \left[Q_i(h) \times \overline{X}_i\right]^2}{\left[\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)\right]^2} \\
&\quad \left. - 2\left[\frac{\overline{X}_i \times SQ_i^2(h) \times \sum_{i=1}^{N} \left(Q_i(h) \times \overline{X}_i\right)}{\sum_{i=1}^{N} Q_i(h)} \right] \right\}
\end{aligned}
$$

APPENDICE D

TRANSFORMATION DES PARAMÈTRES STATISTIQUES D'UN COURANT DE MINERAI LORS DU PASSAGE DANS UN ACCUMULATEUR

TRANSFORMATION DES PARAMÈTRES STATISTIQUES D'UN COURANT DE MINERAI LORS DU PASSAGE DANS UN ACCUMULATEUR

Soient les coefficients de masse k_i, i=1,2,...,p, avec:

$$\sum_{i=1}^{p} k_i = 1$$

et soient les lots X_i à l'entrée de l'accumulateur au temps 'i' dont la teneur moyenne est $\overline{X}$. Alors, la composition du lot Y_t à la sortie de cet accumulateur au temps 't' est donnée par:

$$Y_t = k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_iX_i + \ldots + k_pX_p$$

et la teneur moyenne $\overline{Y}$ à la sortie est donnée par:

$$\begin{aligned}\overline{Y} &= k_1\overline{X} + k_2\overline{X} + \ldots + k_j\overline{X} + \ldots + k_p\overline{X} \\ &= \overline{X}\end{aligned}$$

puisque la teneur moyenne des lots qui se succèdent à l'entrée est $\overline{X}$ et que, par suite, chaque lot d'entrée passe à tour de rôle de la première à la dernière position dans la première équation.

La déviation de teneur du lot 't' à la sortie, $\Delta Y_t = Y_t - \overline{Y}$, est donnée par:

$$\Delta Y_t = k_1\,\Delta X_1 + k_2\,\Delta X_2 + \ldots + k_i\,\Delta X_i + \ldots + k_p\,\Delta X_p$$

et son carré, $\Delta^2 Y_t$, par:

$$\begin{aligned}\Delta^2 Y_t = {} & k_1^2\,\Delta^2 X_1 + k_2^2\,\Delta^2 X_2 + \ldots + k_i^2\,\Delta^2 X_i + \ldots + k_p^2\,\Delta^2 X_p \\ & + 2k_1\,\Delta X_1\,(k_2\,\Delta X_2 + \ldots + k_i\,\Delta X_i + \ldots + k_p\,\Delta X_p) \\ & + 2k_2\,\Delta X_2\,(k_3\,\Delta X_3 + \ldots + k_i\,\Delta X_i + \ldots + k_p\,\Delta X_p) \\ & + \ldots \\ & + 2k_i\,\Delta X_i\,(k_{i+1}\,\Delta X_{i+1} + \ldots + k_p\,\Delta X_p) \\ & + \ldots \\ & + 2k_{p-1}\,\Delta X_{p-1}\,k_p\,\Delta X_p\end{aligned}$$

en posant l'équation $\Delta X_i = X_i - \overline{X}$.

La somme sur 'N' lots des $\Delta^2 Y_{t,j}$ donne:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} \Delta^2 Y_{t,j} = {} & \sum_{j=1}^{N}\left[\Delta^2 X_j \times \sum_{i=1}^{p} k_i^2\right] + \sum_{j=1}^{N-1}\left[\Delta X_j\,\Delta X_{j+1} \times 2\sum_{i=1}^{p-1} k_i\,k_{j+1}\right] + \ldots \\ & + \sum_{j=1}^{N-n}\left[\Delta X_j\,\Delta X_{j+n} \times 2\sum_{i=1}^{p-n} k_i\,k_{i+n}\right] + \ldots \\ & + \sum_{i=1}^{N-(p-1)}\left[\Delta X_j\,\Delta X_{j+(p-1)} \times 2\,k_i\,k_p\right]\end{aligned}$$

où les lots $Y_{t,j}$ sont différés d'un temps 't' dans l'accumulateur par rapport à l'arrivée des lots X_j au système de transfert.

La variance $S_y^2(1)$ des lots à la sortie se calcule donc comme suit:

$$\begin{aligned} S_y^2(1) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta^2 Y_{t,j} \\ &= S_x^2(1)\times\sum_{i=1}^{p}k_i^2 + \varphi_{xx}(1,1)\times 2\sum_{i=1}^{p-1}k_i\,k_{i+1} + \ldots \\ &\quad + \varphi_{xx}(n,1)\times 2\sum_{i=1}^{p-n}k_i\,k_{i+n} + \ldots + \varphi_{xx}(p-1,1)\times 2\,k_1\,k_p \\ &= S_x^2(1)\sum_{i=1}^{p}k_i^2 + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{m=i+1}^{p}k_i\,k_m\,\varphi_{xx}(m-i,1) \end{aligned}$$

car la variance $S_x^2(1)$ des lots à l'entrée est:

$$S_x^2(1) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-n}\Delta^2 X_j$$

et le $n^{ième}$ coefficient d'autocorrélation à l'entrée $\varphi_{xx}(n)$ est:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(n,1) &= \frac{1}{N-n}\sum_{j=1}^{N-n}(X_j-\overline{X})\times(X_{j+n}-\overline{X}) \\ &= \frac{1}{N-n}\sum_{j=1}^{N-n}\Delta X_j\,\Delta X_{j+n} \end{aligned}$$

De la même manière, le calcul des coefficients d'autocorrélation $\varphi_{yy}(m,1)$ de lots unitaires à la sortie de l'accumulateur peut être obtenu selon le développement suivant:

$$\varphi_{yy}(m,1) = \frac{1}{N-m}\sum_{j=1}^{N-m}\Delta Y_{t,j}\,\Delta Y_{t,j+m}$$

où:

$$\begin{aligned} \Delta Y_{t,j}\,\Delta Y_{t,j+m} &= (k_1\,\Delta X_1 + k_2\,\Delta X_2 + \ldots + k_m\,\Delta X_m + \ldots + k_p\,\Delta X_p)\times \\ &\quad (k_{1+m}\,\Delta X_{1+m} + k_{2+m}\,\Delta X_{2+m} + \ldots + k_p\Delta X_p) \end{aligned}$$

Les coefficients d'autocorrélation $\varphi_{yy}(m,1)$ à la sortie peuvent donc être obtenus en

regroupant les produits ayant des distances identiques:

$$\varphi_{yy}(1,1) = S_x^2(1)\sum_{i=1}^{p-1} k_i\,k_{i+1} + \varphi_{xx}(1,1)\left[\sum_{i=1}^{p} k_i^2 + \sum_{i=1}^{p-2} k_i\,k_{i+2}\right]$$
$$+ \varphi_{xx}(2,1)\left[\sum_{i=1}^{p-1} k_i\,k_{i+1} + \sum_{i=1}^{p-3} k_i\,k_{i+3}\right]$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(\ell,1)\left[\sum_{i=1}^{p-(\ell-1)} k_i\,k_{i+(\ell-1)} + \sum_{i=1}^{p-(\ell+1)} k_i\,k_{i+(\ell+1)}\right]$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(p,1)\,k_1 k_p$$

$$\varphi_{yy}(m,1) = S_x^2(1)\sum_{i=1}^{p-m} k_i\,k_{i+m}$$
$$+ \varphi_{xx}(1,1)\left[\sum_{i=1}^{p-(m-1)} k_i\,k_{i+(m-1)} + \sum_{i=1}^{p-(m+1)} k_i\,k_{i+(m+1)}\right]$$
$$+ \varphi_{xx}(2,1)\left[\sum_{i=1}^{p-(m-2)} k_i\,k_{i+(m-2)} + \sum_{i=1}^{p-(m+2)} k_i\,k_{i+(m+2)}\right]$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(m,1)\left[\sum_{i=1}^{p} k_i^2 + \sum_{i=1}^{p-2m} k_i\,k_{i+2m}\right]$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(\ell,1)\left[\sum_{i=1}^{p-(\ell-m)} k_i\,k_{i+(\ell-m)} + \sum_{i=1}^{p-(\ell+n)} k_i\,k_{i+(\ell+m)}\right]$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(p,1)\sum_{i=1}^{h} k_i k_{i+p-m}$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(p+m-1,\,1)\,k_1 k_p$$

$$\varphi_{yy}(p,1) = S_x^2(1)\times 0 + \varphi_{xx}(1,1)\,k_1 k_p + \varphi_{xx}(2,1)\sum_{i=1}^{2} k_i\,k_{i+p-2}$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(p,1)\sum_{i=1}^{p} k_i^2 + \varphi_{xx}(p+1,1)\sum_{i=1}^{p-1} k_i\,k_{i+1}$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(p+\ell,\,1)\sum_{i=1}^{p-\ell} K - i\,k_{i+\ell}$$
$$+ \ldots + \varphi_{xx}(2p-1,\,1)\,k_1 k_p$$

où ℓ représente une distance quelconque entre '1' et 'p'.

Il faut souligner ici que les coefficients d'autocorrélation des lots à la sortie de dimension supérieure à l'unité peuvent ensuite être calculés à l'aide des équations de l'appendice 'B'.